Lycées Bascan de Rambouillet
31 mars 2016

Coup d'œil aux coefficients du binôme

1 Les coefficients du binôme

Si n et k sont des entiers naturels, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.
Premiers calculs : lorsque $k \geq n+1$, lorsque $k=1$, lorsque $k=n-1$, lorsque $k=n$, lorsque $k=0$, calcul de $\binom{4}{2}$ à la main.
Relation de Pascal, preuve combinatoire : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$, pour tous n et k. On remplit le (début du) tableau.

On regarde le tableau. Somme du début d'une colonne. Si $n \geq k$,

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Interprétation combinatoire (somme des premiers entiers, nombres triangulaires, piles d'oranges, nombres tétraédriques...). Preuve avec la formule de Pascal.

Formule du binôme et sa preuve combinatoire en commençant par les petits n (prolonger les identités remarquables du collège) :

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Aussi, preuve par récurrence avec $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y)$ et la formule de Pascal.

Somme d'une ligne. Preuve avec la formule du binôme. Interprétation combinatoire (et seconde preuve). Idem somme alternée (facile à voir dans le cas impair à cause de la symétrie).

[Eventuellement, avec ce genre de comptage, paradoxe des anniversaires, crashes aériens et livre de Janvresse et de la Rue *La loi des séries, hasard ou fatalité ?*, éditions Le Pommier.]

2 Lignes premières

Définition d'un nombre premier. Les premiers : $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\ldots$ On regarde le triangle de Pascal : les coefficients de la $p^{\text{ième}}$ ligne sont multiplies de p si p est premier.

Pour le voir, montrer et prouver la formule close (définir la notation $n!$)

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ecrire que p divise $p! = k!(p-k)!\binom{p}{k}$. Evoquer le lemme d'Euclide.

Congruence et notation $a = b\ [p]$ lorsque p divise $a-b$. La formule du binôme s'écrit, lorsque p est premier, sous la forme de l'identité remarquable “du paradis des collégiens” :

$$(x+y)^p = x^p + y^p\ [p].$$

3 Identités remarquables infinies

Racine carrée et notation $(1+x)^{1/2}$, lorsque $x \geq -1$.
Imaginons qu'on puisse développer $(1+x)^{1/2} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ pour tous les réels x voisins de 0. Alors, en prenant la valeur en 0, on obtient que $a_0 = 1$. Mais on en dit bien plus.

On note $f(x) = (1+x)^{1/2}$. Pour les élèves de première et terminale, on dérive :

$$(1+x)f'(x) = \frac{1}{2} f(x).$$

On développe en dérivant terme à terme (c'est licite, ici !), et on obtient

$$(1+x)(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots) = \frac{1}{2}(1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots).$$

En identifiant les termes (encore licite !), on trouve

$$a_1 = \frac{1}{2}\ ;\ a_1 + 2a_2 = \frac{1}{2} a_1\ ;\ 2a_2 + 3a_3 = \frac{1}{2} a_2\ ;\ 3a_3 + 4a_4 = \frac{1}{2} a_3\ ;\ \dots$$

ou encore, en résolvant

$$a_n = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n(n-1)(n-2)\dots 1}.$$

Par analogie, on note ce nombre $a_n = \binom{1/2}{n}$, et on trouve la formule

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \binom{1/2}{n} x + \binom{1/2}{1} x^2 + \binom{1/2}{2} x^3 + \dots \tag{1}$$

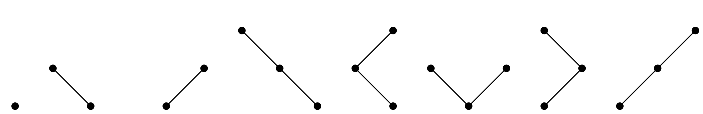
A vrai dire, on aurait trouvé la même formule en remplaçant 1/2 par n'importe quel nombre α réel ou même complexe, à condition de donner au préalable un sens à la puissance α. Autrement dit, on a une sorte d'identité remarquable

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots$$

On remarque que la somme est infinie lorsque α n'est pas un entier naturel. Une telle somme n'a pas toujours de sens. Par exemple, $1 + 1 + 1 + \dots$ tend vers l'infini, mais $1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \dots = 2$ (preuve). Il ne suffit pas que le terme général tende vers 0 pour qu'un somme infinie ait un sens, exemple de la série harmonique et preuve de sa divergence avec les paquets de Cauchy. Ici, la somme (1) a du sens ("converge") à condition que $|x| < 1$ (x réel ou complexe, deux mots sur les nombres complexes pour les plus jeunes).

4 Arbres binaires

On cherche à compter les arbres binaires plans à n nœuds. Dessin pour montrer ce que signifie binaire plan. Les premiers :



On note C_n est le nombre d'arbres binaires plans à n sommets. Le début : $C_0 = 1$ (l'arbre vide !), $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, on trouverait $C_4 = 14$, et avec un peu de patience, $C_5 = 42$. Et après ?

Un calcul d'apparence osé, mais qui, en travaillant un peu, trouve une pleine justification.
Décomposition combinatoire des arbres binaires, faire un dessin.
On note

$$C(x) = \sum_{n\geq 0} C_n x^n.$$

La décomposition combinatoire des arbres binaires se traduit par l'égalité fonctionnelle

$$C(x) = 1 + xC(x)^2.$$

On résout cette équation algébrique de degré 2, et on trouve, en éliminant la racine qui ne convient pas grâce à la propriété $C(0) = 1$,

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Mais on sait développer la racine carré par l'identité du binôme généralisée. On obtient

$$C_n = -\frac{1}{2}(-4)^{n+1}\binom{1/2}{n+1} = (\textit{petit calcul rigolo}) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Et revoilà les coefficients du binôme du "milieu". Les C_n sont des nombres très célèbres : les *nombres de Catalan*[1]. Ils comptent beaucoup d'objets : parenthésages, arbres planaires (pas forcément binaires), chemins de Dyck, *etc, etc.*

Suite et fin : arbres planaires, chemins de Dyck, équivalence combinatoire, mouvement brownien (excursion, plutôt), ouverture sur des sciences connexes : biologie (pollens), chimie (gaz), informatique (algorithmes de tri).

[1] Eugène Charles Catalan, mathématicien belge, 1814-1894.