CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2011

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

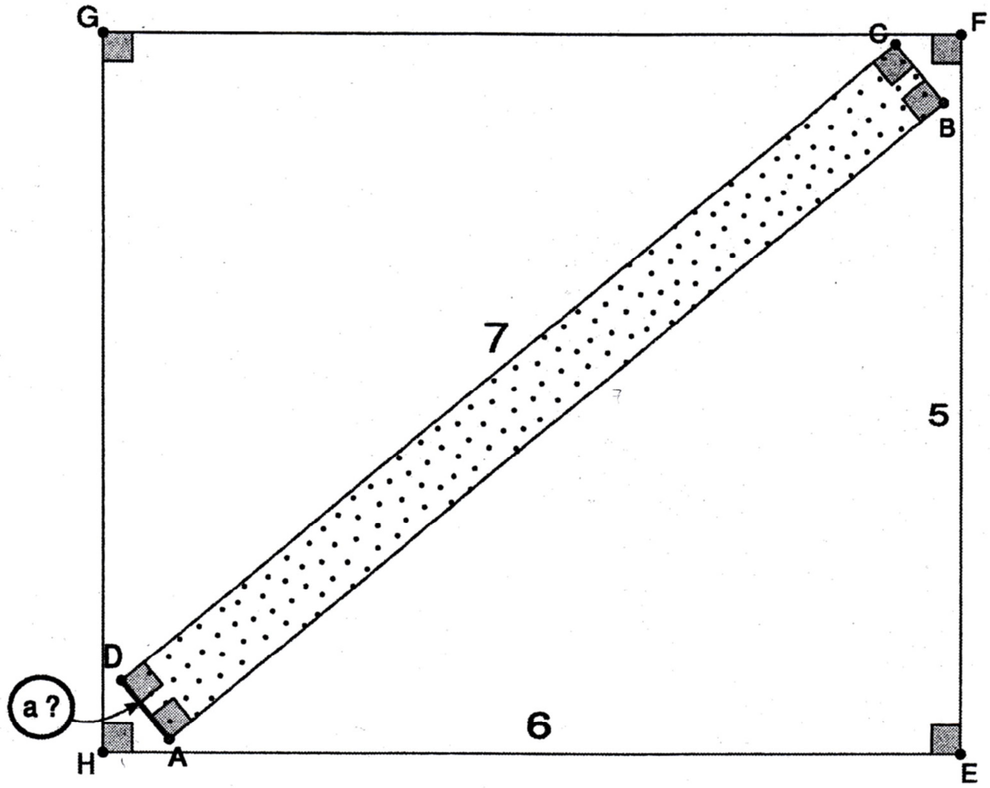
L'énoncé comporte trois exercices indépendants.

Il n'est pas obligatoire de traiter les exercices dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement l'exercice et la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Pour poursuivre la résolution d'un exercice, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1
C'est dans la boite



Quelles valeurs de a conviennent ?

Exercice 2
Rendez la monnaie !

Un acheteur a dans son porte-monnaie n pièces. Notons $a_1, \ldots, a_n$ la valeur faciale de ces pièces – ce sont des nombres entiers strictement positifs. Convenons d'appeler *capacité* de ce porte monnaie le plus grand nombre entier M tel que l'on puisse payer sans rendu de monnaie toute somme (entière) de 1 à M. Notons $C(a_1, \ldots, a_n)$ la capacité du porte monnaie contenant les pièces $a_1, \ldots, a_n$.

1°) **Sans rendu.** On suppose dans cette question que l'on a $a_1 = 1$ et $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$.

   (a) Calculer les capacités $C(1, 2, 4)$, $C(1, 2, 5)$ et $C(1, 2, 3, 4, 5)$.

   (b) Soit j un nombre entier compris entre 1 et $n - 1$ et fixons les nombres $a_1, \ldots, a_j$. À quelle condition sur a_{j+1} a-t-on $C(a_1, \ldots, a_j) \neq C(a_1, \ldots, a_j, a_{j+1})$?

   (c) Donner une méthode pour calculer $C(a_1, \ldots, a_n)$.

   (d) On fixe n. Comment choisir les nombres entiers $a_1, \ldots, a_n$ pour que la capacité $C(a_1, \ldots, a_n)$ soit la plus grande possible ?

2°) **Avec rendu de monnaie.** Le marchand chez qui notre acheteur va faire ses courses possède aussi un porte-monnaie, lui permettant de rendre la monnaie.

Fixons des nombres entiers n et p. Nommons *capacité commune* le plus grand nombre entier M tel que l'on puisse payer (c'est-à-dire accomplir la transaction) toute somme qui soit un nombre entier de 1 à M. Comment choisir les porte-monnaies $(a_1, \ldots, a_n)$ de l'acheteur et $(v_1, \ldots, v_p)$ du vendeur afin qu'ils offrent la plus grande capacité commune possible ?

Exercice 3
La racine du carré

On considère l'ensemble $U_m = \left\{ \exp(\frac{2ik\pi}{m}) \ / \ 0 \leqslant k \leqslant m-1 \right\}$; on rappelle que c'est aussi l'ensemble des racines m-ièmes complexes de l'unité, c'est à dire l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $z^m = 1$.

On se donne un entier strictement positif n et on cherche s'il existe une fonction $f : U_{2n} \to U_{2n}$ vérifiant $f(f(z)) = z^2$ pour tout z dans U_{2n}.

1°) Montrer que l'ensemble $\{z^2 \ / \ z \in U_{2n}\}$ est égal à U_n et qu'il est inclus dans U_{2n}.

2°) On suppose qu'il existe une solution f au problème considéré.

(a) Vérifier que $f(z^2) = (f(z))^2$ pour tout z dans U_{2n}.

(b) Montrer que $f(z) = f(z') \Rightarrow z = \pm z'$ et que $f(1) = f(-1) = 1$.

3°) Selon la valeur de n, existe-t-il un élément de z de U_{2n} qui vérifie $z^2 = -1$? Si oui, vérifier qu'alors il n'y a pas de fonction f solution.

4°) Selon la valeur de n, existe-t-il un élément de z de U_{2n} qui vérifie $z^3 = 1$ avec $z \neq 1$? Si oui, vérifier qu'alors il n'y a pas de fonction f solution.

5°) On suppose dans toute la suite de l'énoncé que l'entier n est impair.

(a) Vérifier que la fonction g de U_n dans lui-même qui à z appartenant à U_n associe z^2 est bijective.

(b) On suppose qu'il existe une solution f au problème. Vérifier qu'il existe une application $\varphi : U_n \to U_n$ telle que $\varphi \circ \varphi = g$.

(c) Réciproquement, on suppose qu'il existe une fonction $\varphi : U_n \to U_n$ telle que $\varphi \circ \varphi = g$. Construire alors une solution f au problème.

(d) Exemple : on prend $n = 5$, dire s'il existe une solution au problème, si oui en construire une.

(e) Même question avec $n = 7$ puis $n = 9$.