Lycée Bascan de Rambouillet
Introduction à l'exposé d'Antoine Chambert-Loir
Les mystères de la fonction zêta de Riemann à la BNF,
conférences *Un texte, un mathématicien.*
18 mars 2011.

Sur les nombres premiers et la fonction ζ

Sujet très vaste ; il a fallu faire des choix cornéliens.

1 Aperçu sur les nombres premiers

Un *nombre premier* est un nombre entier $p \geq 2$ dont les seuls diviseurs positifs sont 1 et p.

La liste des vingt premiers : $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71$.

Tout nombre entier naturel se décompose de manière unique en un produit de nombres premiers. Par exemple, $3\ 192\ 290\ 292\ 037 = 7 \times 11^2 \times 37^4 \times 2011$. Remarque : 2011 est un nombre premier. On essaye en vain de le diviser par $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43$, cela suffit car 47 est le premier suivant et $47^2 = 2209 > 2011$.

L'ensemble des nombres premiers est infini (Euclide, *ca.* 300 av. J.C.).

Un nombre étant donné, savoir s'il est premier est algorithmiquement coûteux (cribles). Cela est utilisé en cryptologie où l'on se bat pour établir le record (secret) du plus grand nombre premier connu. En 2009, le plus grand nombre premier connu sur la place publique était $2^{43\ 112\ 609} - 1$ (c'est un nombre de Mersenne, qui compte environ 13 millions de décimales).

Question de la répartition des nombres premiers.
C'est une question très large, aux multiples facettes.
Premier exemple, le théorème de Tchebycheff (*ca* 1850), ex-postulat de Bertrand : pour tout entier naturel n, l'intervalle $[n, 2n]$ contient au moins un nombre premier. Preuve accessible à un lycéen curieux, en tout cas pour un étudiant du début de l'enseignement supérieur.
Second exemple : on dit que deux nombres premiers sont *jumeaux* si leur différence vaut 2. Premiers exemples. On ne sait pas s'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux.
La fonction π : pour tout nombre réel $x > 0$, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers p qui vérifient $p \leq x$. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on notera p_n le $n^{\text{ième}}$ nombre premier. Début du tableau ci-dessous.

n	p_n	$n \ln n$	$\frac{p_n}{n \ln n}$
1	2	0	–
2	3	~ 1	$\sim 2,164$
3	5	~ 3	$\sim 1,517$
4	7	~ 5	$\sim 1,262$
10	29	~ 23	$\sim 1,259$
100	541	~ 460	$\sim 1,174$
1000	7919	~ 6907	$\sim 1,146$

En 1896, Hadamard et de la Vallée-Poussin démontrent indépendamment le difficile *théorème des nombres premiers* : $p_n \sim n \ln n$ lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui signifie que la limite en $+\infty$ de $\frac{p_n}{n \ln n}$ égale 1. Compléter le tableau. Ce théorème n'est guère accessible avant quatre ou cinq années d'études supérieures en mathématiques, malgré des simplifications de la preuve originale. Une formulation équivalente : $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, ce qui signifie que $\lim_{+\infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} = 1$.

En 1859, Riemann conjecture (sous une forme différente) que

$$\forall \alpha > \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\left|\pi(x) - \frac{x}{\ln x}\right|}{x^\alpha} = 0. \tag{1}$$

C'est ce qu'on appelle *l'hypothèse de Riemann*, qui n'est aujourd'hui toujours pas démontrée ni infirmée et qui reste sans doute le plus grand défi pour les mathématiciens du monde entier. On en donne une autre formulation équivalente, plus classique, dans la section suivante.

2 Fonction zêta

Convergence vers 1 de la série $\sum 1/n(n+1)$ (décomposer le terme général en éléments simples) et de la série $\sum 1/n^2$ (le terme général est majoré par $1/n(n-1)$ et toute suite croissante majorée converge, comparer à l'intégrale pour aller plus loin).
Divergence de la série harmonique (paquets de n à $2n$, on montre que $\sum_{k=1}^{2^n} 1/k \geq n/2$).
Ainsi, ajouter "une infinité de termes" positifs tendant vers 0 amène à deux comportements différents selon les termes qu'on ajoute.

La comparaison avec une intégrale montre que, si s est réel, $\sum 1/n^s$ converge si, et seulement si $s > 1$. La *fonction zêta de Riemann* est la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}. \tag{2}$$

Intermède cubes/Lune.

La fonction ζ suscite encore beaucoup de questions jugées très (très) difficiles.
Par exemple, $\zeta(2) = \pi^2/6$ (plus de math, séries de Fourier, "harmoniques" d'une fonction, acoustique et timbre). Mais aussi $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(6) = \pi^6/945$, *etc.* Mais on ne sait même pas si $\zeta(3)$ est un nombre rationnel. *Idem* pour les valeurs de ζ en les autres nombres impairs.

Si z est un nombre complexe et n un entier naturel non nul, $|1/n^z| = 1/n^{\Re z}$ (calcul, pour les terminale). Ainsi, on montre que la fonction ζ est définie par la formule (2) sur le demi-plan $\{z,\ \Re z > 1\}$.

Convergence de la série alternée $\eta(s) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1}/n^s$ si $s > 0$. Par suites adjacentes : pour $n \geq 1$, $S_{2n+1} \leq S_{2n}$ et $S_{2n} - S_{2n+1} = 1/(2n+1)^s$ tend vers 0.
Par exemple, on montre que la série harmonique alternée $\eta(1)$ converge vers $\ln 2$ (niveau premier cycle universitaire ; vérifier avec une machine, par exemple, mais la convergence est lente).
On peut là encore étendre la définition de la fonction η à tout le demi-plan complexe $\{z,\ \Re z > 0\}$.

Ces convergences étant acquises, petit calcul élémentaire : pour tout $s > 1$ (ou pour tout complexe z dont s est la partie réelle), $\eta(s) = (1 - 2/2^s)\zeta(s)$, ou encore

$$\zeta(z) = \frac{\eta(z)}{1 - \frac{2}{2^z}}. \tag{3}$$

La fonction η est définie par la série alternée lorsque $\Re(z) > 0$, ce qui permet de prolonger la fonction ζ à tout le demi-plan $\{z,\ \Re z > 0\}$, sauf en $z = 1$ qui annule le dénominateur de (3).

Conjecture de Riemann (ou "hypothèse" de Riemann, équivalente à la formulation précédente mais cette équivalence est hors de portée des lycéens) : *tous les nombres complexes du demi-plan $\{z,\ \Re z > 0\}$ qui annulent ζ ont une partie réelle égale à $1/2$.*

Quels liens entre ζ et les nombres premiers ? Ils sont innombrables. Juste une évocation ici.

Identité polynomiale $(1-X)(1+X+X^2+\cdots+X^n)=1-X^{n+1}$. On en déduit que si $|z|<1$, la série géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge et que sa limite vaut $\frac{1}{1-z}$. En développant le produit, on voit que

$$\prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p\leq P}} \frac{1}{1-1/p} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots\right)\dots\left(1+\frac{1}{P}+\frac{1}{P^2}+\dots\right)$$

est la somme des inverses des entiers dont le décomposition en facteurs premiers ne fait apparaître que les nombres de $\{2,3,5,\dots,P\}$. On montre ainsi que la somme infinie $\sum 1/n$ et le produit infini $\prod(1-1/p)^{-1}$ ont la même "valeur" $+\infty$ (cela se légitime entièrement sans ambiguïté, avec les outils du premier cycle de l'enseignement supérieur). Le même calcul permet d'ajouter des puissance s si $\Re(s)>1$ et de montrer l'identité eulérienne

$$\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}=\prod_{p \text{ premier}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$$

On a montré que la série harmonique diverge. On fait mieux. Tout ce qui suit se légitime encore sans difficulté notable.
On a montré que $\prod(1-1/p)^{-1}=+\infty$, ce qui entraîne aussi que $\sum \ln(1-1/p)=-\infty$. Par ailleurs, en prenant l'intégrale de 0 à x dans l'identité polynomiale ci-dessus, on montre que lorsque $|x|<1$, $-\ln(1-x)=x+x^2/2+x^3/3+\dots$ Ainsi, puisque les séries $\sum 1/p^2$, $\sum 1/p^3$ *etc* convergent, on obtient que la série

$$\sum_{p \text{ premier}}\frac{1}{p}$$

diverge : en ajoutant les inverses des nombres premiers successifs, on dépasse tout nombre donné.