Lycée Bascan de Rambouillet
Introduction à l'exposé de Patrick Gérard
*D'Alembert : les Lumières et les ondes* à la BNF,
conférences *Un texte, un mathématicien.*
22 février 2013.

# Sur les équations différentielles, notes d'exposé

## 1 Equations différentielles ordinaires

Modèles de la physique. Exemple de la chute libre d'un point massique soumis à l'attraction terrestre, équation $z''(t) = -g$ qui s'intègre en $z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. Exemple du pendule de longueur $\ell$, équation $\theta'' + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$, qui s'intègre avec des fonctions ("spéciales") elliptiques de Jacobi[1]. Cas des petites oscillations $\theta'' + \frac{g}{\ell}\theta = 0$ qui s'intègre plus simplement en $\theta(t) = \theta_0 \cos t\sqrt{g/\ell}$. On trouve un mouvement périodique, de plus petite période $2\pi\sqrt{\ell/g}$. Noter que cette période ne dépend pas de l'angle initial $\theta_0$. Evoquer les difficultés théoriques soulevées par l'approximation des "petites" oscillations (deux fonctions dérivables peuvent être proches l'une de l'autre sans que leurs dérivées le soient), mais qui trouvent une justification complète.

Ainsi, une *équation différentielle* est une équation reliant une fonction à ses dérivées.

Parfois, on peut trouver toutes les solutions à l'aide de fonctions "usuelles". Par exemple, $y' = y$ dont on peut montrer (au lycée) qu'elle n'admet que les fonctions de la forme $C\exp(x)$, $C \in \mathbb{R}$ comme solutions. Autre exemple : l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$ où $A$ et $B$ sont des nombres réels. Il existe un catalogue de méthodes de résolution de familles entières d'équations différentielles.

Problème de Cauchy[2]. Dessin des courbes intégrales de $y' = y$. Par chaque point du plan passe une unique courbe intégrale de l'équation. Autrement dit, pour tous les réels $x_0$ et $y_0$, il existe une unique fonction $f$ qui satisfait le *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(x_0) = y_0. \end{cases}$$

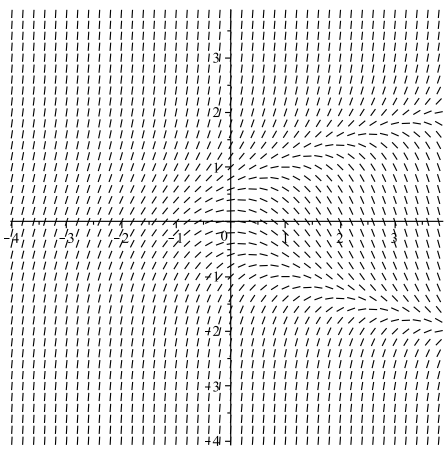
Condition *au bord* (ou *aux limites*). Cas des équations d'ordre supérieur, imposer des conditions sur les dérivées en le point du bord. Ce phénomène est assez général : sous des hypothèses "raisonnables", le théorème de Cauchy-Lipschitz[3] nous dit qu'on a existence et unicité de la solution au problème de Cauchy. Parapluie théorique. Vision géométrique.

En général, les solutions d'une équation différentielle, même très simple, si elles existent, ne s'écrivent pas en termes de fonctions usuelles. C'est le cas par exemple de l'équation $y' = y^2 - x$ (beaucoup de mathématiques, théorie de Galois différentielle).

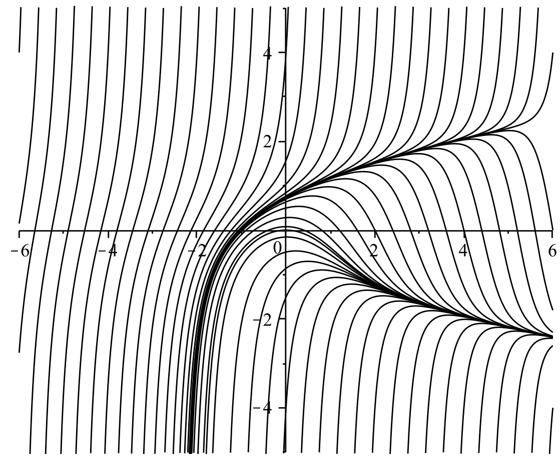
Pour remédier à cela, on a d'autres moyens d'étude (très riches).
(i) Résolution approchée, rendue très performante par le développement de l'informatique. Schémas numériques. Branche des mathématiques appliquées : l'analyse numérique. Les dessins de courbes intégrales ci-dessous sont faits à partir d'une résolution approchée sur un ordinateur.

[1]Charles Gustave Jacob Jacobi, Potsdam 1804 – Berlin 1851.
[2]Augustin Louis Cauchy, Paris 1789 – Sceaux 1857.
[3]Rudolf Lipschitz, Königsberg 1832 – Bonn 1903.

(ii) Approche graphique, à partir du champ des tangentes. Exemple d'étude graphique de l'équation $y' = y^2 - x$. Zone piège. Voir les dessins.



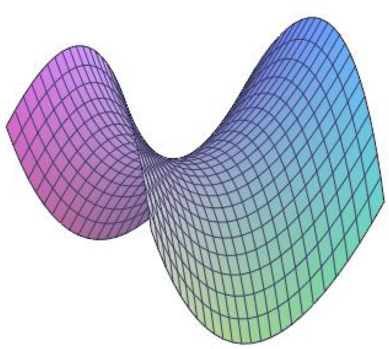
$y' = y^2 - x$ : champ des tangentes




$y' = y^2 - x$ : champ des courbes intégrales

## 2 Equations aux dérivées partielles

Elles constituent l'un des apports de d'Alembert[4] dont il sera question à la conférence de Gérard.



Surface $z = x^2 - y^2$.

Fonction de plusieurs (deux, pour nous) variables.
Le graphe a pour équation $z = f(x, y)$ : surface dans l'espace $\mathbb{R}^3$.
Exemples de la demi-sphère $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$,
des plans non verticaux $z = ax + by + c$,
de la surface $z = x^2 - y^2$ (point col du paraboloïde hyperbolique), voir le dessin.

Dérivées partielles : on fixe une variable et on dérive par rapport à l'autre (ou aux autres si on a plus de deux variables). On note les dérivées partielles successives

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial xy},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\quad etc$$

Exemple : dérivées de $x^2 - y^2$, de $\sin(x + y)$.

A la manière de la dérivée qui fournit l'équation de la tangente à une courbe plane, les dérivées partielles fournissent l'équation du plan tangent à la surface représentative.

[4] Jean le Rond d'Alembert, Paris 1717 – Paris 1783.

Equation $z = z_0 + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Une équation reliant une fonction de plusieurs variables à ses dérivées partielles est appelée *équation aux dérivées partielles*, en abrégé *EDP*.

Un exemple : $\Delta(f) = 0$ où $\Delta$ est l'*opérateur laplacien*[5], défini par $\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Les solutions de cette équation sont les *fonctions harmoniques* qui sont des fonctions très importantes dans beaucoup de domaines des mathématiques et de la physique. Par exemple, $(x, y) \mapsto x^3 - 3xy^2$, ou $(x, y) \mapsto e^x \cos y$, ou encore $(x, y) \mapsto e^{x^2 - y^2} \cos(2xy)$.

Les solutions d'une EDP sont plus "nombreuses" que celles d'une équation différentielle. Les conditions aux limites qui permettent de garantir une forme d'unicité des solutions fixent la valeur de la solution sur le bord du domaine sur lequel on étudie l'équation. Par exemple, pour les fonctions harmoniques sur le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, étant donnée une fonction $L$ définie sur le cercle $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$ qui soit suffisamment régulière, il existe une unique fonction $f$ définie sur le disque qui satisfait le *problème de Dirichlet*[6]

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in D,\ \Delta(f)(x, y) = 0) \\ \forall (x_0, y_0) \in C,\ f(x_0, y_0) = L(x_0, y_0). \end{cases}$$

Interprétation physique (approximative) du problème de Dirichlet.

Considérations générales les EDP, sur leurs aspects théoriques, géométriques, numériques. Difficulté de "bien poser" les conditions aux limites.

Quelques EDP célèbres :
équation de la chaleur $\frac{\partial f}{\partial t} = D\Delta(f)$ où $D$ est un nombre ("diffusivité") ;
équation de Schrödinger[7] $i\hbar\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta(f) + Vf$ où $V$ est une fonction ("potentiel") ;
bien d'autres encores, qui modélisent des phénomènes physiques, géologiques, biologiques, *etc.*

## 3 Un exemple : l'équation des ondes

C'est une équation qui modélise la forme d'une corde vibrante (guitare ou violon, par exemple). Dessin. Le modèle dit que la déformation de la corde en fonction du temps est régi par l'EDP

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

où $c$ est homogène à une vitesse.

**Théorème de d'Alembert (1747)** *La solution générale de l'équation des ondes est la superposition de deux ondes arbitraires se propageant en sens opposés. Autrement dit, sa solution générale s'écrit*

$$y(x, t) = F\left(t - \frac{x}{c}\right) + G\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

*où $F$ et $G$ sont des fonctions quelconques d'une variable (suffisamment dérivables).*

Ces fonctions sont des solutions (élémentaire). Le théorème de d'Alembert affirme qu'il n'y en a pas d'autres.

[5]Pierre-Simon Laplace, Beaumont en Auge 1749 – Paris 1827.
[6]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Düren 1805 – Göttingen 1859.
[7]Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, Vienne 1887 – Vienne 1961.

## 4 Séries de Fourier, équation des ondes, harmoniques

A étudier la propagation des ondes, on observe des phénomènes périodiques (bouchon à la surface de l'océan). Parmi les fonctions périodiques de période donnée $T = 1/\omega$ ($\omega$ est la *fréquence* de l'oscillation), on trouve les célébrissimes fonctions trigonométriques $x \mapsto \cos(2\pi n\omega x)$ et $x \mapsto \sin(2\pi n\omega x)$, où $n$ est un nombre entier relatif.
L'idée de Fourier[8] est de considérer ces fonctions trigonométriques comme des "briques" permettant de construire toute fonction $T$-périodique. Mieux dit, de considérer toute fonction $T$-périodique comme une superposition de fonctions sinusoïdales. Quitte à multiplier la variable par $\omega$, il suffit d'étudier les fonctions $2\pi$-périodiques.

La question est la suivante : une fonction $2\pi$-périodique $f$ peut-elle se développer en série trigonométrique

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

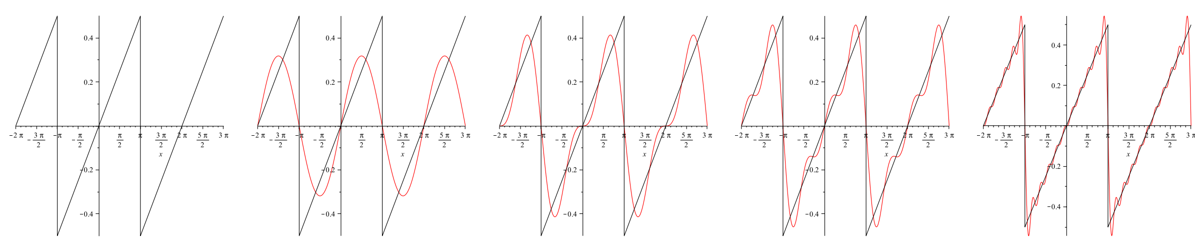
où les $c_n$ sont des nombres complexes (ajuster en $\sin nx$ et $\cos nx$ si l'exponentielle complexe n'est pas vue) ? Si la fonction $f$ est "assez régulière", on retrouve les $c_n$ en fonction de $f$ par le calcul (le faire) de

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

et la réponse est oui.

Ainsi, toute fonction (assez régulière) périodique se *développe en série de Fourier.*

Un exemple : la fonction $2\pi$-périodique en dents de scie dont le graphe est dessiné ci-dessous en noir se développe en séries de Fourier. On dessine le graphe de la fonction et les premières sommes partielles (somme des 1, 2, 3 et 10 premiers termes de la série, en rouge).



Application à une corde vibrante.
La tension, la masse (linéique) et la longueur de la corde déterminent la hauteur du son émis (accord de l'instrument). En termes physique, c'est la période du signal sonore (périodique) qui est fixée par ces données. Par exemple, on considère que la corde de La d'une guitare est accordée lorsqu'elle vibre à 110Hz (battements par seconde).
Alors, si $F$ est une fonction (développée en série de Fourier) de la forme

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \exp\left(220 i\pi n x\right),$$

[8] Jean Baptiste Joseph Fourier, Auxerre 1768 – Paris 1830.

elle fournit une solution $(x,t) \mapsto F(t-x/c)$ de l'équation des ondes, qui modélise le mouvement (et le son) de la corde de façon satisfaisante.

Sons harmoniques, accessibles en effleurant la corde du doigt. Le son d'une corde est une superposition de sons harmoniques. Le timbre est caractérisé par la répartition de ces harmoniques, c'est-à-dire par les nombres $c_n$ qui représentent les intensités des harmoniques.

Approche sommaire. Evoque comment l'équation de d'Alembert permet de modéliser finement l'acoustique des ondes sonores (stationnaires).