Le travail du mathématicien

Jean-Benoît Bost

IUF et Université Paris-Sud

Lycée Bascan, Rambouillet, 18 janvier 2011

Exposé en deux parties :

- Trois niveaux d'activité mathématique
- Quelques aspects paradoxaux de l'activité du mathématicien.

puis discussion...

Trois niveaux d'activité mathématique

- Calculs (au sens le plus large).
  capacité d'appliquer des algorithmes/méthodes classiques de façon rapide et fiable.
- Application raisonnée de théories/méthodes connues.
- Recherche mathématique :
  - Résolution de problèmes ouverts.
  - Elaboration et clarification de concepts.

“Calculs” I
Multiplier des polynômes

- Un premier exemple :

$$\begin{aligned}(3X+7)(5X-3) &= 3X.5X + 3X.(-3) + 7.5X + 7.(-3)\\ &= 15X^2 + 26X - 21.\end{aligned}$$

- Encore plus simple : $(X+1)(X-7) \stackrel{?}{=} X^2+1$.

  Non, bien sûr ! En fait :

$$(X+1)(X-7) = X^2 - 6X - 7.$$

“Calculs” II
Résoudre une équation du second degré

Méthode babylonienne...

Prenons un exemple :

$$X^2 + 6X - 17 = 0.$$

On reconnaît dans $X^2 + 6X$ le début du dévelopement de $(X + 3)^2$.
En effet,

$$(X + 3)^2 = X^2 + 6X + 9.$$

L'équation
$$X^2 + 6X - 17 = 0$$
peut donc se récrire :
$$(X+3)^2 - 9 - 17 = 0,$$
ou encore
$$(X+3)^2 = 26.$$
On en déduit que l'équation admet deux solutions, $X = \sqrt{26} - 3$ et $X = -\sqrt{26} - 3$.

Utilisation de méthodes connues

Problème : *Soient S et P deux nombres réels. Déterminer les couples de nombres réels (a, b) tels que*

$$a + b = S$$

et

$$ab = P.$$

Pour résoudre ce problème, on remarque que les assertions suivantes sont successivement équivalentes :

- $a + b = S$ et $ab = P$;
- $b = S - a$ et $a(S - a) = P$;
- $b = S - a$ et $Sa - a^2 = P$;
- $b = S - a$ et $a^2 - Sa + P = 0$.

L'équation du second degré $X^2 - SX + P = 0$ peut se résoudre au moyen de la "méthode générale", rappelée plus haut.
On écrit donc

$$X^2 - SX + P = (X - S/2)^2 - S^2/4 + P.$$

Par conséquent, l'équation $X^2 - SX + P = 0$, équivalente à $(X - S/2)^2 - S^2/4 + P = 0$,

- n'a pas de solution lorsque $-S^2/4 + P > 0$;
- a pour unique solution $X = S/2$ lorsque $-S^2/4 + P = 0$;
- a deux solutions lorsque $S^2/4 - P > O$, à savoir

$$X = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$$

  et

$$X = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}.$$

Finalement, notre problème de départ — *trouver les couples* (a, b) *tels que* $a + b = S$ *et* $ab = P$ —

- n'a pas de solution lorsque $-S^2/4 + P > 0$;
- a pour unique solution $a = b = S/2$ lorsque $-S^2/4 + P = 0$;
- a deux solutions lorsque $S^2/4 - P > O$, à savoir

$$a = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$$

$$b = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - P},$$

et

$$a = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$$

$$b = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}.$$

“Recherche mathématique” I : Résolution de problèmes ouverts

Importance des idées nouvelles

Un exemple historique :
la résolution des équations du troisième degré.

Début du XVI-ème siècle : Tartaglia, del Ferro, Cardan.
Prenons un exemple (particulier, mais qui permet de comprendre une méthode de résolution valable dans une situation générale) :

$$X^3 + 3X^2 - 3X - 25 = 0.$$

Première idée (plutôt facile) : reconnaître dans $X^3 + 3X^2$ le début du développement de

$$(X+1)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1.$$

Cela suggère de poser

$$Y = X + 1,$$

ou de façon équivalente,

$$X = Y - 1.$$

L'équation $X^3 + 3X^2 - 3X - 25 = 0$ s'écrit alors :

$$(Y - 1)^3 + 3(Y - 1)^2 - 3(Y - 1) - 25 = 0,$$

ou encore :

$$Y^3 - 6Y - 20 = 0.$$

Nous avons un peu progressé : nous nous sommes ramenés à une équation du troisième degré sans terme du second degré.

Hélas, cela ne nous permet pas de résoudre l'équation…

Que faire ?

Seconde idée (terriblement ingénieuse) :

- chercher la solution de $Y^3 - 6Y - 20 = 0$ sous la forme $Y = U + V$; récrire l'équation sous la forme :

$$(U + V)^3 - 6(U + V) - 20 = 0,$$

puis, en remarquant que

$$(U + V)^3 = U^3 + 3UV(U + V) + V^3,$$

sous la forme :

$$U^3 + V^3 + (3UV - 6)(U + V) - 20 = 0.$$

- demander en outre que

$$3UV - 6 = 0.$$

"On" a ainsi montré que, si

$$U^3 + V^3 = 20$$

et

$$UV = 2$$

(ou ce qui revient au même, $U^3V^3 = 8$), alors $U + V$ est solution de $Y^3 - 6Y - 20 = 0$.
Il est facile de trouver U et V satisfaisant à ces conditions, en utilisant la solution du "Problème" étudié plus haut.
On trouve finalement comme solution :

$$Y = \sqrt[3]{10 + 2\sqrt{23}} + \sqrt[3]{10 - 2\sqrt{23}}.$$

Recherche mathématique II : Clarification et élaboration de concepts

Importance des idées (nouvelles, sur le long terme...)

Quelques remarques sur le concept de nombre réel

Nous avons tous une idée intuitive (plutôt) claire de ce que sont les les nombres réels et l'ensemble $\mathbb{R}$ qu'ils constituent.

En effet, tout nombre réel possède une écriture décimale, de la forme :

$$x = -18012001,123456789101112131415161718192021...$$

Au moyen de leur écriture décimal, on sait comparer additionner, multiplier,... deux nombres réels, du moins en principe...

Un point subtil, mais essentiel : “beaucoup” de nombres réels ont deux développements décimaux.

En effet :

$$0,9999999999999999.... = 1$$

$$12,199999999999999.... = 12,20000000....$$

et de même pour chaque nombre décimal.

Observations :

- d'un point de vue technique, complique la construction précise des nombres réels, et plus encore celle des opérations ($+$, $\times$) dans $\mathbb{R}$ et la preuve rigoureuse de leurs propriétés de base ;
- ces concepts, aujourd'hui bien familiers, ne le sont pas depuis si longtemps ; il ne sont complètement élucidée que depuis la seconde moitié du XIX-ème siècle, par Bolzano, Dedekind, Weierstrass, même si ces mathématiciens ont eu des prédecesseurs géniaux dans l'Antiquité, comme Eudoxe, Archimède ;
- résout les "paradoxes" datant de l'Antiquité (Zénon d'Elée) sur le mouvement, le continu,...

Achille et la tortue

Achille : 10 m/s.
La tortue : 1 m/s.
La tortue part avec une seconde d'avance.
Au bout d'une seconde, la tortue a parcouru 1m. Alors Achille part, et parcourt ce mètre en 1/10 s. La tortue a alors parcouru 1/10 m, qu'Achille va mettre 1/100 s à parcourir,...
Finalement, Achille rattrape la tortue au bout de

$$1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + ... = 1,1111... = \frac{10}{9}s.$$

Trois niveaux d'activité mathématique

- Calculs = application d'algorithmes, automatismes ;
- Application de théories/méthodes connues = pensée rationnelle ;
- Recherche mathématique = découverte, élaboration d'idées nouvelles, parfois développées très rapidement, d'autres fois très lentement.

"Glissement vers le haut" aux échelles individuelle et historiques.

Quelques aspects paradoxaux de l'activité du mathématicien.

- Les mathématiques : un sujet si vieux, si jeune.
  Mathématiciens : solitude et société.
- Résolution des problèmes, développement des concepts.
- Les mathématiques aujourd'hui et les ordinateurs.
- Preuves, rigueur, erreurs.

Quelques références :

- J.-P. Changeux, A.Connes, *Matière à pensée*, Paris : Odile Jacob, 1989.
- B. Mazur, *Imagining Numbers (Particularly the Square Root of Minus Fifteen)*, New York : Farrar Straus Giroux, 2003.
- T. Gowers, ed., *The Princeton Companion to Mathematics*, Princeton : Princeton University Press, 2008.