Lycée Bascan de Rambouillet
Introduction à l'exposé d'Emmanuel Giroux
Les colonnes de Gergonne, dualité, controverse et paradoxe à la BNF,
conférences *Un texte, un mathématicien.*
18 janvier 2012.

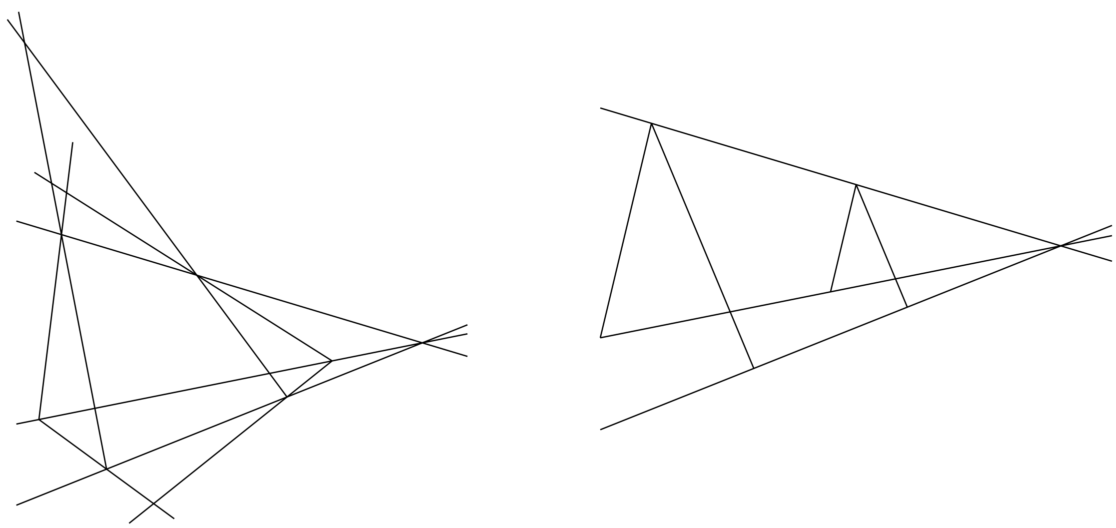
Introduction à la géométrie projective et à la dualité

1 Desargues

Girard Desargues, mathématicien et architecte lyonnais, 1591-1661.
Enoncés dans le plan affine, sans preuve. Cas "particulier" des droites parallèles, avec preuve vectorielle.

Théorème de Desargues *Dans le plan, soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles à sommets distincts. On note $\{U\} = (BC) \cap (B'C')$, $\{V\} = (CA) \cap (C'A')$ et $\{W\} = (AB) \cap (A'B')$. Alors, si les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes, les points U, V et W sont alignés.*

A vrai dire, l'implication est une équivalence.
Dessin, en même temps que l'énoncé.



Cas singulier pour lequel cet énoncé n'a pas de sens : on suppose que (AB) est parallèle à $(A'B')$ et que (AC) est parallèle à $(A'C')$. Soient b et c les réels tels que $\overrightarrow{AB} = c\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AC} = b\overrightarrow{A'C'}$. D'après le théorème de Thalès (ou la relation de Chasles), l'hypothèse sur le parallélisme assure que $\overrightarrow{OA} = b\overrightarrow{OA'} = c\overrightarrow{OA'}$, ce qui assure que $b = c$. Alors, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = b\overrightarrow{C'B'}$: les droites (CB) et $(C'B')$ sont également parallèles.

2 La droite projective

La droite projective est l'ensemble des droites du plan passant par l'origine O (par un point quelconque choisi comme étant l'origine).

$$\mathbb{P}^1 = \{d,\ d \text{ droite du plan},\ d \text{ passe par } O\}.$$

Soit p la "projection" sur la droite horizontale d'altitude 1 que l'on note $\mathcal{D}$ (*idem* sur une droite ne contenant pas le point donné). Dessin. Application injective.

$$\begin{array}{rcl} p : \mathcal{D} & \to & \mathbb{P}^1 \\ P & \mapsto & (OP) \end{array}$$

L'image de p n'évite que la droite horizontale. Au bout du compte, p plonge $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{P}^1$. On peut voir $\mathbb{P}^1$ comme une droite affine à laquelle on adjoint un point dit *à l'infini.*

$$\mathbb{P}^1 = \mathcal{D} \cup \{\infty\}.$$

Si $(u, v) \neq (0, 0)$, les points de la droite affine passant par O et par le point de coordonnées (u, v) sont les points dont les coordonnées sont de la forme (tu, tv) où $t \in \mathbb{R}$. On repère cette droite par ses *coordonnées homogènes*

$$(u : v) = \{(tu, tv),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Dans la projection p, la correspondance est $(x, 1) \mapsto (x : 1)$ et $\infty \mapsto (1 : 0)$: le point à l'infini est *le* point $(u : v)$ pour lequel $v = 0$.

Une droite projective étant donnée, on peut *choisir* le point à l'infini, ce qui revient à choisir une droite sur laquelle on projette. Ce qui reste est une droite affine. Cela revient à choisir *un* système de coordonnés homogènes.

La droite projective réelle ressemble à un cercle. Sur le corps des complexes, elle ressemble à une sphère.

3 Le plan projectif

Le plan projectif est l'ensemble des droites de l'espace de dimension 3 passant par l'origine (par un point donné).

$$\mathbb{P}^2 = \{d,\ d \text{ droite de l'espace},\ d \text{ passe par } O\}.$$

Construction analogue : projection sur le plan $\mathcal{P}$ d'altitude 1 (sur un plan ne contenant pas le point donné). Au bout du compte, plan affine et droite (projective) à l'infini :

$$\mathbb{P}^2 = \mathcal{P} \cup \mathbb{P}^1$$

Ici encore, on peut travailler sur un système de coordonnées homogènes

$$(u : v : w) = \{(tu, tv, tw),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Dans un système de coordonnées homogènes, les point à distance finie, en correspondance avec $\mathcal{P}$, sont les $(u : v : w)$, $w \neq 0$, c'est-à-dire les $(x : y : 1)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Les points à l'infini, qui forment une droite projective, sont les $(u : v : 0)$, $(u, v) \neq (0, 0)$.

Là encore, un plan projectif étant donné, on peut *choisir* la droite à l'infini, ce qui revient à choisir un plan affine sur laquelle on projette. Ce qui reste est un plan affine. Cela revient à choisir *un* système de coordonnés homogènes.

Une propriété nouvelle : *deux droites distinctes du plan projectif se coupent* toujours *en un unique point.*

Par exemple, considérons les deux droites parallèles $\{(x, y, 1),\ x+2y+1 = 0\}$ et $\{(x, y, 1),\ x+2y-3 = 0\}$ du plan affine d'altitude 1. Dans la correspondance, la première a pour image l'ensemble des points de coordonnées homogènes $(x : y : 1)$, $x + 2y = 1$, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées homogènes (u, v, w), $u + 2v + w = 0$, $w \neq 0$, qui sont les points à distance finie de la droite projective d'équation homogène $u+2v+w = 0$. De la même manière, la droite (affine) $\{(x, y, 1),\ x+2y-3 = 0\}$ est l'ensemble des points à distance finie de la droite projective $\{(u : v : w),\ u+2v-3w = 0\}$. L'intersection de ces deux droites projectives est l'ensemble des points du plan projectif de coordonnées homogènes

$(u : v : w)$ vérifiant $u + 2v + w = 0$ et $u + 2v - 3w = 0$. Cette intersection est l'ensemble des points de la forme $(u : v : 0)$, $u + 2v = 0$: c'est le point (à l'infini) de coordonnées homogènes $(2 : -1 : 0)$.
Cela illustre le point suivant : deux droites parallèles du plan (affine) d'altitude 1, vues comme droites projectives du plan projectif, se coupent à l'infini. C'est la formalisation mathématique de l'observation répandue des rails d'une voie ferrée rectiligne.

En bref, pour travailler sur des coordonnées dans le plan projectif, on "homogénéise" les coordonnées (x, y) du plan affine en posant $x = u/w$ et $y = v/w$; les points à l'infini sont les points $(u : v : w)$ pour lesquels $w = 0$.

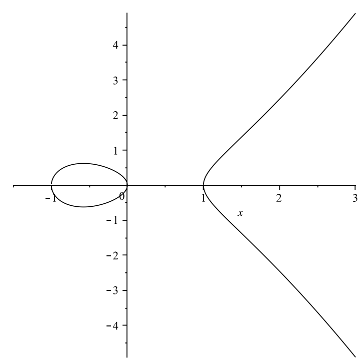
4 Retour à Desargues

Preuve du théorème de Desargues, rigoureusement validée par la théorie une fois développée. On envoie les points W et V à l'infini. On tombe sur l'énoncé "singulier" que l'on a démontré. Le point U est donc aussi sur la droite à l'infini : il est aligné avec V et W. Et voilà Desargues démontré dans le cas général !

5 Courbes planes

Courbes (polynomiales) de degré d. Ce sont les courbes du plan projectif qui admettent une équation de la forme $F(u, v, w) = 0$ où F est un polynôme *homogène* de degré d.

Exemple de $y^2 = x^3 - x$ qui s'homogénéise en $v^2w = u^3 - uw^2$. Membre de la famille des courbes elliptiques, importantes en cryptographie. Dessin réel et affine ci-contre. L'unique point à l'infini $(0 : 1 : 0)$ de la courbe correspond à la direction asymptotique verticale.

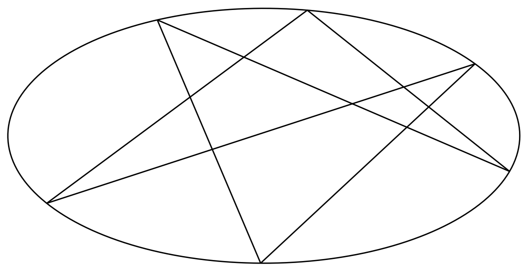
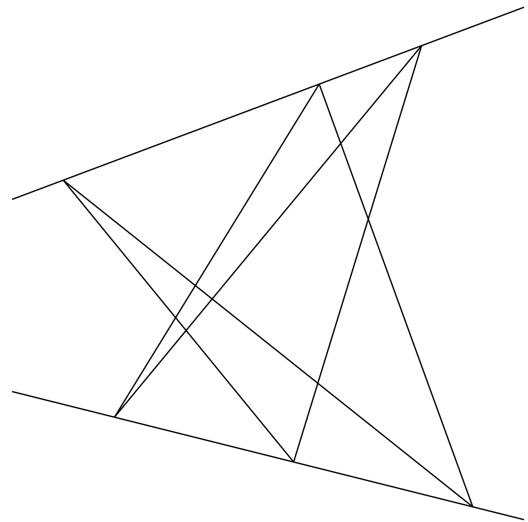


Exemple des coniques. Intersection d'une ellipse et d'une droite, de deux ellipses.
Intersection de la cubique ci-dessus et d'une droite.

Théorème de Bézout (compter les multiplicités, passer en projectif *et* en complexes pour obtenir un énoncé valide !) : *une courbe de degré d et une courbe de degré e se coupent en de points.*
Ce théorème est *grosso modo* du niveau bacc+5, voire plus.

Quid de l'intersection de deux cercles ?
Tous les cercles passent par les points cycliques, dont les coordonnées sont $(1 : i : 0)$ et $(1 : -i : 0)$. Preuve par le calcul (équation affine euclidienne d'un cercle à partir de $||\overrightarrow{OM}|| = r$, homogénéiser, trouver les points à l'infini communs).

Théorème de Pappus (hexagone inscrit à une conique). Alignement des points d'intersection. Valide aussi lorsque la conique est dégénérée à deux droites (dessins).

6 Dualité

L'application qui à un point $(a : b : c)$ du plan projectif associe la droite projective d'équation homogène $au + bv + cw = 0$ est bi-univoque (bijective). Elle envoie les triplets de points alignés sur les triplets de droites concourantes. Cette propriété élémentaire est aujourd'hui du ressort du premier cycle universitaire. Cependant, elle fut l'objet d'une grande découverte alors que la gémétrie projective n'était pas encore axiomatisée en termes de mathématiques contemporaines (Joseph Diaz Gergonne, 1771-1859, mathématicien français, Nîmes puis Montpellier).
Un exemple d'application : Pappus sur deux droites et son dual.
Le théorème de Desargues est autodual : le dual de chaque implication est l'implication réciproque.