Stage olympique
pour lycéens de première

21 et 22 décembre 2009

Centre de recherche
INRIA Paris Rocquencourt

La Pépinière académique de mathématiques est une initiative de l'académie de Versailles et de ses partenaires, l'INRIA (Centres de Paris Rocquencourt et de Saclay Île de France), l'Olympiade française de mathématiques, l'Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines. Elle organise grâce à des bénévoles des stages destinés aux élèves intéressés et talentueux *désignés par leurs établissements*.

Emploi du temps

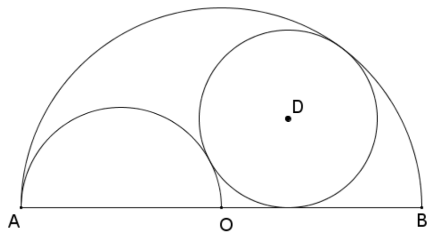
	Groupe 1	Groupe 2
Lundi 10 heures	**Géométrie** Michel ABADIE	**Probabilités, nombres, combinatoire** Claude DESCHAMPS
Lundi 13 heures	**Probabilités, nombres, combinatoire** Claude DESCHAMPS	**Géométrie** Michel ABADIE
Lundi 15 heures	**Inégalités** Claude DESCHAMPS	**Inégalités** Michel ABADIE
Mardi 10 heures	**Aires et espace** Monique TALEB	**Fonctions** Aude CHUPIN
Mardi 13 heures	**Fonctions** Aude CHUPIN	**Aires et espace** Monique TALEB
Mardi 15 heures	**Divers (pour finir)** Aude CHUPIN	**Divers (pour finir)** Monique TALEB

Pépinière académique de mathématiques
Lundi 21 & mardi 22 décembre 2009

INRIA
Centre de recherche de Paris Rocquencourt

GÉOMÉTRIE

Exercice 1



On considère un demi-cercle de centre O, de diamètre [AB] et, à l'intérieur de ce demi-cercle, le demi-cercle de diamètre [AO].
Montrer qu'il existe un cercle tangent à la fois aux deux demi-cercles et à la droite (AB).
On pose AB = R
Exprimer en fonction de R le rayon de ce cercle.

Exercice 2
On considère un carré ABCD de côté a. Soit E un point donné de [BC], distinct de B et de C.
1. Montrer qu'il existe un point F de [CD] tel que le périmètre du triangle CFE soit égal à $2a$.
2. Quelle est alors la mesure de l'angle $\widehat{EAF}$?

Exercice 3
Soit ABC un triangle rectangle isocèle de sommet principal C.
On considère un point D du segment [AC] et un point E du segment [BC] tels que CD = CE.
Les perpendiculaires à (AE) passant par D et C recoupent (AB) respectivement en K et L.
Montrer que KL = LB.

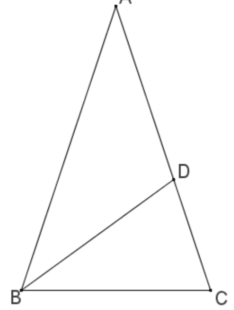
Exercice 4
On considère une table de flipper ; sur cette table sont placés trois plots non alignés A, B et C, assimilés à des points. On veut choisir un autre point M sur la table, où placer un mécanisme agissant de la façon suivante :

Toute bille partie de A *et arrivée en* M *en suivant une trajectoire rectiligne est ensuite renvoyée de* M *vers la droite* (BC) *en suivant la perpendiculaire en* M *à la droite* (AM).

Représenter l'ensemble des points M pour lesquels la bille lancée de A passera entre B et C après son rebond en M.

Exercice 5
Dans un triangle ABC, la hauteur, la médiane et la bissectrice issues du sommet A partagent l'angle $\widehat{BAC}$ en quatre angles de même mesure.
Quelles sont les mesures des angles du triangle ABC ?

Exercice 6



Le triangle ABC est isocèle de sommet principal A. Le point D, point d'intersection de la bissectrice issue de B du triangle ABC avec le côté [AC] est tel que le triangle DBC soit isocèle de sommet principal B.

Utiliser cette configuration pour calculer $\cos\frac{\pi}{5}$.

FONCTIONS

1. On définit pour chaque couple de réels (a,b) la fonction f par : $f(x) = a - \sqrt{x+b}$.

   Deux nombres réels u et v distincts sont dits *échangeables* s'il existe au moins un couple (a,b) tel que la fonction f vérifie $f(u) = v$ et $f(v) = u$.

   a) Les nombres 2 et 3 sont-ils *échangeables* ? Les nombres 4 et 7 sont-ils *échangeables* ?

   b) A quelle condition deux entiers u et v sont-ils *échangeables* ?

   Prolongement possible :

   On définit maintenant pour chaque triplet de réels (a,b,c) avec $c > 0$, la fonction g par :

   $$g(x) = a - c\sqrt{x+b}.$$

   Deux nombres réels u et v distincts sont dits *coupables* s'il existe au moins un triplet (a,b,c) tel que la fonction g vérifie $g(u) = v$ et $g(v) = u$.

   a) Montrer que 2004 et 204 sont *coupables*. Plus précisément, donner un triplet (a,b,c) tel que $g(2004) = 204$ et $g(204) = 2004$ et :

   - c soit le plus grand possible.
   - a, b et c soient tous des entiers.

   b) Trouver tous les *coupables* !

2. Une urne a la forme d'un paraboloïde de révolution de hauteur 9. La section de ce paraboloïde par un plan passant par son axe est la parabole dont une équation dans un repère orthonormal bien choisi est $y = x^2$.

   a) On fait tomber dans l'urne une bille sphérique B de rayon 0,1. La bille B va-t-elle toucher le fond de l'urne ?

   b) On fait tomber dans l'urne une seconde bille sphérique B' de rayon 1. La bille B' va-t-elle toucher la bille B ?

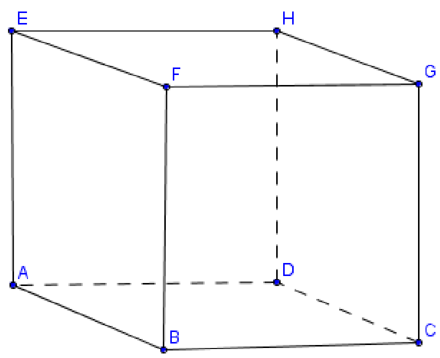
3. On considère un cube ABCDEFGH.

   Un point M_1 parcourt, à vitesse constante, le segment [BH] de H vers B.

   Un point M_2 parcourt, à vitesse constante, le segment [BG] de B vers G.

   Les deux points commencent à se déplacer au même instant et M_1 atteint B à l'instant où M_2 atteint G.

   Quelle est la valeur minimale de la distance M_1M_2 ?



4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $\begin{cases} f(x) = 2x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ f(x) = 2 - 2x & \text{si } \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$.

a) Représenter graphiquement la fonction f et montrer que si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

b) Un nombre x_0 étant choisi dans l'intervalle $[0,1]$, on fabrique une suite de nombres en posant :

$x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, etc…

Montrer que la suite obtenue est constante lorsqu'on pose $x_0 = \dfrac{1}{48}$.

Calculer x_{2009} lorsqu'on pose $x_0 = \dfrac{2}{11}$.

Peut-on trouver une valeur de x_0 telle que la suite de nombres soit périodique de période 7 (c'est-à-dire se répète tous les 7 termes) ? soit périodique de période p (p étant un entier non nul).

c) Montrer que si x_0 est un nombre rationnel, la suite de nombres est périodique.

5. On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbf{R} - \{1\} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{1-x} \end{cases}$

On pose, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et tout réel x d'un ensemble qu'on ne précisera pas, $f_n(x) = \underbrace{f \circ f \circ f \circ ... \circ f}_{n\ fois}(x)$. Calculer $f_{2010}(2009)$.

6. On considère les fonctions suivantes :

$f : \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto x+1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbf{R} - \{-1\} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{1+x} \end{cases}$.

Est-il possible d'obtenir le nombre $\dfrac{7891}{1987}$ par applications successives de f ou g à partir de 1 ?

Inégalités

1. Soit a, b, c et d quatre réels tels que $a < b < c < d$.
   On pose $x = (a+b)(c+d)$, $y = (a+c)(b+d)$ et $z = (a+d)(b+c)$.
   Comparer les nombres x, y et z.

2. On considère trois réels positifs tels que, pour chaque paire choisie, la différence entre la somme de ces deux réels et le réel restant soit positive. Prouver que le produit de ces trois différences est inférieur ou égal au produit de ces trois nombres.

3. Soit a, b et c trois nombres réels positifs. Montrer que :
   a) $abc \geqslant (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$;
   b) $a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2b+b^2c+c^2a$;
   c) $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2} \geqslant \dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}$
   d) $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2} \geqslant \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}$.

4. Prouver que parmi cinq nombres réels positifs donnés, on peut trouver deux réels a et b tels que :

$$0 \leqslant \frac{a}{1+a^2} - \frac{b}{1+b^2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

5. Soit a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle.

   a) Montrer que $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc$.

   Dans quel cas a-t-on l'égalité ?
   b) Soit a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que :

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

6. Démontrer que pour tous réels x, y et z tels que $x \geqslant y \geqslant z > 0$, on a l'égalité :

$$x^2\frac{y}{z}+y^2\frac{z}{x}+z^2\frac{x}{y} \geqslant x^2+y^2+z^2.$$

Probabilités, nombres, combinatoire

Exercice 1 Probabilités

Dix personnes sont assises autour d'une table ronde.

Dix jetons portant les numéros 1 à 10 sont distribués au hasard à ces dix personnes. Chaque personne gagne la somme égale en euros au total du numéro de son propre jeton et de celui de son voisin de droite.

1. A l'aide d'un procédé aléatoire de votre choix, donner un exemple de répartition des jetons.
   Sur cet exemple, indiquer le gain de chaque personne et la moyenne de ces 10 gains.
2. Prouver que, quelle que soit la répartition des jetons, au moins une des dix personnes aura un gain supérieur ou égal à 17 €.
3. 3. Donner un exemple où tous les gains sont inférieurs ou égaux à 18.
4. Peut-on, dans la deuxième question, remplacer 17 par 18 ?

Exercice 2 Arithmétique

Le nombre 60 a pour carré 3 600; si on enlève les deux derniers chiffres de ce carré, on obtient le nombre 36 qui est lui-même un carré ; ceci est valable si on remplace 60 par n'importe quel nombre divisible par 10.

Le nombre 31 a pour carré 961 ; si on enlève les deux derniers chiffres de ce carré, on obtient le nombre 9 qui est lui-même un carré, on peut donc écrire : $31^2 = 3^2 \times 10^2 + 61$.

Trouver tous les nombres entiers non multiples de 10, tels que si on enlève les deux derniers chiffres de ce carré, on obtient encore un carré.

Exercice 3 Arithmétique

Après de multiples péripéties, une archéologue a été abandonnée par un faux guide, évanouie et dévalisée à l'intérieur d'une pyramide. A son réveil, elle se retrouve seule dans une immense pièce entourée de quatre-cents portes fermées, numérotées de 1 à 400. Elle découvre près d'elle un papyrus indiquant qu'une seule porte permet d'en sortir, les autres donnant sur des couloirs piégés. Ce papyrus donne aussi le moyen de trouver la bonne porte :

Sachant qu' « actionner une porte » c'est « la fermer si elle est ouverte, l'ouvrir si elle est fermée », suivre les instructions suivantes :

Étape 1 : ouvrir toutes les portes ;

Étape 2 : actionner les portes dont les numéros sont des multiples de 2(ici, cela revient à les fermer).

Étape 3 : actionner celles dont le numéro est un multiple de 3 ;

Étape 4 : actionner celles dont le numéro est un multiple de 4 ;

Étape 5 : actionner celles dont le numéro est un multiple de 5 ;

Et ainsi de suite …

A la fin de toutes les étapes, sortir par la dix-septième porte ouverte.

A la fin de toutes les étapes :

1. Préciser la position (ouverte ou fermée) de chacune des cinq premières portes.
2. 2. Que dire des positions des portes 24, 25, 27, 36 et 40 ?
3. Quelle conjecture peut-on faire sur le numéro des portes qui sont ouvertes ?
4. Quel est le numéro de la porte qui lui a permis de sortir ?
5. Comment l'archéologue a-t-t=elle fait pour le trouver ?

Exercice 4 Nombres, combinatoire

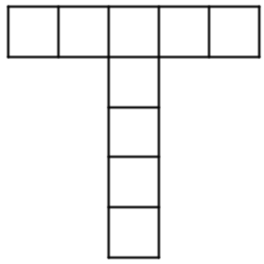
On dispose :

- d'un damier formé de 10 × 10 petits carrés identiques ;
- d'une pièce d'un seul tenant obtenue en accolant successivement par au moins un côté 9 petits carrés identiques à ceux du damier.

Le problème consiste à poser plusieurs exemplaires identiques de cette pièce en respectant les règles suivantes :

- chaque exemplaire peut être tourné ou retourné ;
- chaque petit carré constituant les exemplaires recouvre exactement un petit carré du damier ;
- deux exemplaires ne peuvent pas se chevaucher.

1. Dessiner l'une des solutions si on pose quatre exemplaires de la pièce représentée ci-contre.
2. Montrer que, quelle que soit la forme de la pièce de départ, il est possible de poser deux exemplaires de cette pièce en respectant les règles ci-dessus.
3. Peut-on, dans la question précédente, remplacer deux par trois, quatre, cinq, etc. ?



Exercice 5 Combinatoire

Une cagnotte contient autant de pièces de 1 euros que de 2 euros que nécessaire.
On prélève dans cette cagnotte une somme de 5 euros.
Cela peut se faire

- Soit en prélevant cinq pièces de 1 euros. On représente ce tirage par le nombre 11111
- Soit en prélevant trois pièces de 1 euro et une pièce de 2 euros. Il y a 4 possibilités représentées par les nombres 1112, 1121, 1211, 2111
- Soit en prélevant une pièce de 1 euro et deux pièces de 2 euros, ce qui donne trois possibilités représentées par les nombres 122, 212 et 221.

Pour résumer la situation, on dira que la somme de 5 euros génère huit nombres différents, ceque l'on note $S_5 = 8$.
Que vaut alors S_{11} ?

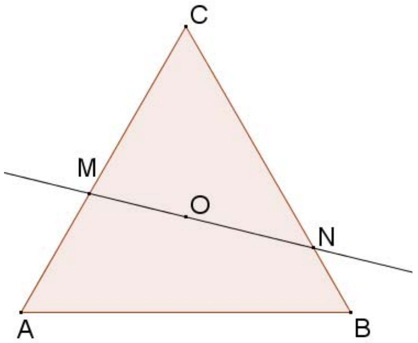
Exercice 6 Nombres

On considère le nombre décimal $N = 0,\underbrace{999\ldots999}_{1\,000 \text{ fois le chiffre } 9}$.

Quels sont les deux mille premiers chiffres après la virgule de l'écriture décimale du nombre $\sqrt{N}$?

AIRES et ESPACE

Exercice 1



Soit ABC un triangle équilatéral de côté *a* et de centre O. On considère un point M du segment [AC] et on pose x = CM. Si les droites (MO) et (BC) sont sécantes, on appelle N leur point d'intersection.

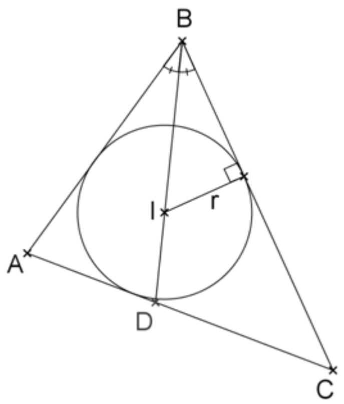
1. Quel est l'ensemble I des réels x pour lesquels N appartient au segment [BC] ?
2. Pour tout élément x de I, on note S(x) l'aire du triangle CMN. Quelles sont les valeurs maximale et minimale de S(x) ?

Exercice 2

Première question : Démontrer que dans un triangle *ABC*, si on note p le périmètre et r le rayon du cercle inscrit, alors l'aire S du triangle est donnée par : $S = r \times \frac{p}{2}$.

Deuxième question : Une unité de longueur étant choisie, on appelle *triangle académique* un triangle dont les mesures des côtés sont en proportion arithmétique de raison 1. Dans tout l'exercice, on considère un triangle ABC tel que $AB < AC < BC$. Ainsi, un tel triangle est *académique* si : $AC = AB + 1$ et $BC = AB + 2$.

1. On note I le centre du cercle inscrit dans le triangle *ABC* et *D* le pied de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$. Démontrer que si *ABC* est *académique* alors $BD = 3ID$.
2. Un triangle *académique* peut-il être rectangle ? Justifier. Quelles sont alors ses dimensions ?
3. On suppose que le triangle *ABC* est *académique* et que $AB > 3$. Démontrer que les trois angles du triangle *ABC* sont aigus et qu'un seul d'entre eux a une mesure supérieure à 60°.



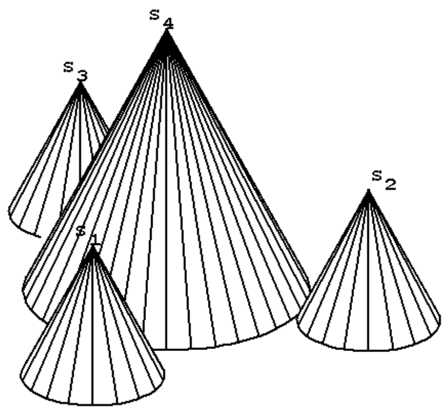
Exercice 3

Quatre cônes sont posés sur le sol.

Les trois cônes de sommets S1, S2 et S3 sont identiques. Leur hauteur est égale au rayon r de leurs cercles de base et les centres de ces cercles sont les sommets d'un triangle équilatéral de côté 1.

La hauteur du cône de sommet S4 est égale au diamètre de son cercle de base et celui-ci est tangent extérieurement aux cercles de base des trois autres cônes.

Les quatre cônes sont opaques. Quelle condition doit vérifier r pour que, depuis le sommet de chacun des quatre cônes, les trois autres soient visibles ?

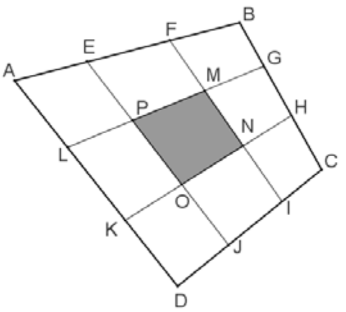


Exercice 4

Trois boules de pétanques d'un diamètre de 6 cm sont posées l'une contre l'autre sur un plan horizontal.

1. Quel est le diamètre minimal du cochonnet disposé entre ces trois boules pour qu'il ne tombe pas entre celles-ci ?
2. Quel est le diamètre minimal du cochonnet disposé entre ces trois boules pour que l'on puisse poser au-dessus une planche en contact avec les trois boules et le cochonnet ?
3. Quel est le diamètre minimal du cochonnet disposé entre ces trois boules pour que l'on puisse poser au-dessus une quatrième en contact avec les trois premières boules et le cochonnet ?

Exercice 5



Les côtés du quadrilatère convexe ABCD ont été découpés chacun en trois segments de même longueur par les points E et F, G et H, I et J, K et L.

Les droites (FI) et (GL) se coupent en M, (HK) et (IF) en N, (JE) et (KH) en O et (LG) et (EJ) en P.

Montrer que l'aire du quadrilatère MNOP est le neuvième de celle de ABCD.

Exercice 6

Soit C un cercle de centre O. Soit A un point fixe situé à l'intérieur de ce cercle. Soit M un point mobile sur le cercle.

1. Déterminer la (ou les) position(s) de M pour que l'aire du triangle AOM soit maximale.
2. Déterminer la (ou les) position(s) de M pour que la mesure de l'angle $\widehat{OMA}$ soit maximale.

Divers

1. On considère les nombres a, b, c et d définis par :
$$a=\sqrt{4-\sqrt{5-a}}\ ,\ b=\sqrt{4+\sqrt{5-b}}\ ,\ c=\sqrt{4-\sqrt{5+c}}\ \text{ et }\ d=\sqrt{4+\sqrt{5+d}}\ .$$
Calculer le produit $abcd$.

2. a) Peut-on trouver deux entiers a et b tels que le volume du cube de côté a soit le double de celui du cube de côté b ?
Plus généralement, montrer que la seule solution de l'équation $a^3+2b^3+4c^3=0$ (où a, b et c sont des entiers relatifs) est $a=b=c=0$.
b). Trouver un ensemble infini d'entiers p tels que la seule solution en nombre entiers a, b et c de l'équation $a^3+pb^3+p^2c^3=0$ soit $a=b=c=0$.
c) Trouver un entier supérieur ou égal à 2 pour lequel l'équation précédente admet au moins une autre solution que $a=b=c=0$.

3. On dispose de cinq nombres entiers. Si on les ajoute deux à deux, on obtient les dix sommes suivantes :
2001, 2006, 2007, 2008, 2009, 2014, 2017, 2018, 2023 et 2025.
Quels sont ces cinq nombres ?

4. On appelle « carré » un nombre qui est le carré d'un nombre entier.
On appelle « cube » un nombre qui est le cube d'un nombre entier.
Quelle est la première liste de 1000 nombres entiers positifs consécutifs :
   a) qui ne contient aucun carré ?
   b) qui ne contient aucun cube ?
   c) qui ne contient aucun carré ni aucun cube ?

5. Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels a tels que n^4+a ne soit premier pour aucune valeur de n.

6. Résoudre dans $\left(\mathbf{N}^*\right)^3$ l'équation $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1$