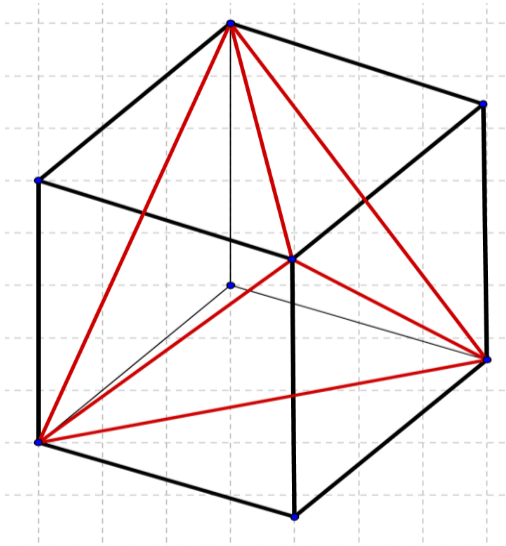
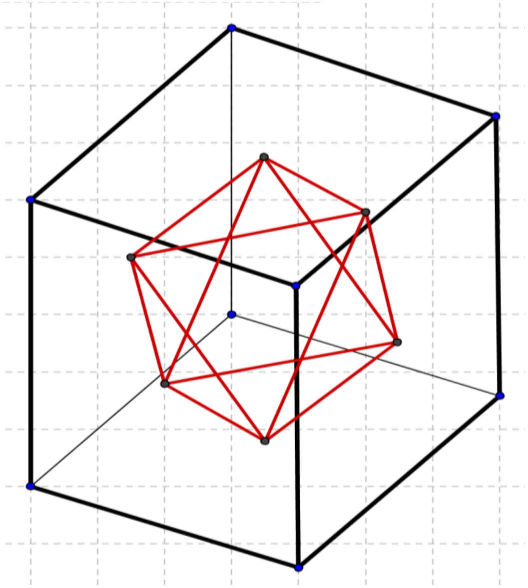
Polyèdres

1. La formule d'Euler-Descartes
2. Quelques calculs d'angles et de distances

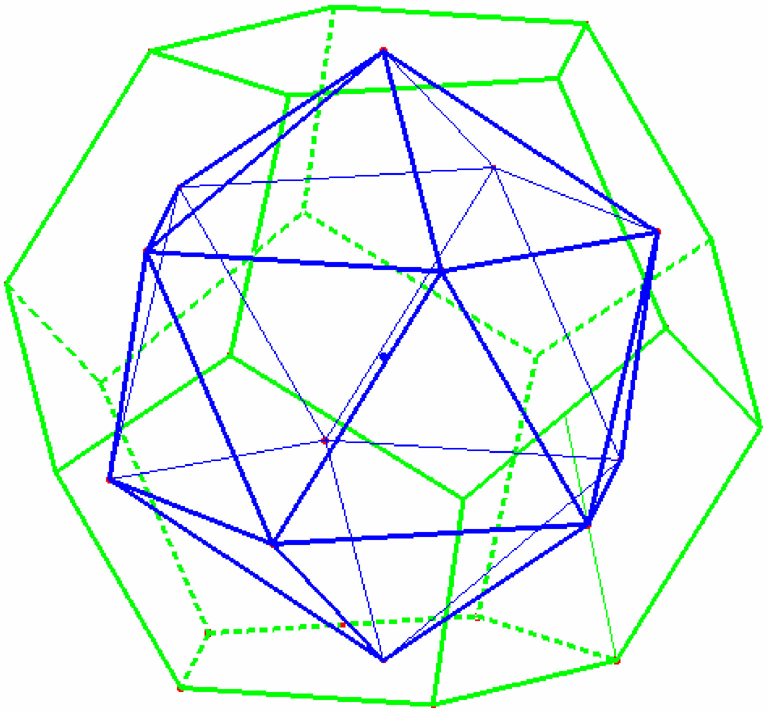
Les polyèdres de Platon

Un polyèdre est dit régulier s’il est inscriptible dans une sphère et si ses faces sont des polygones réguliers tous identiques. On peut montrer qu’il n’y en a que cinq : le tétraèdre régulier, l’hexaèdre (cube), l’octaèdre, le dodécaèdre et l’icosaèdre

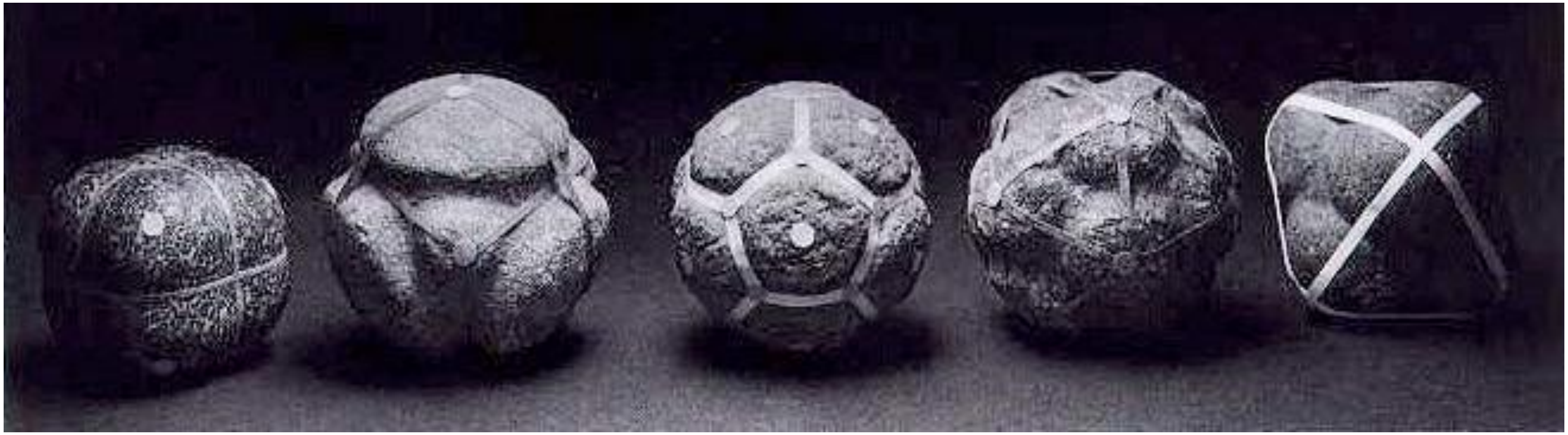




Dodécaèdre et icosaèdre



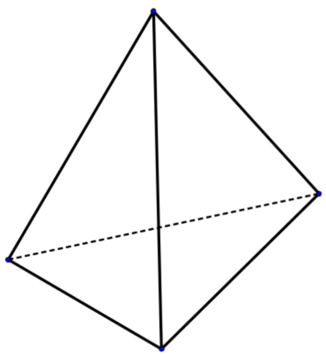
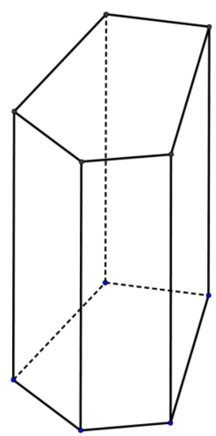
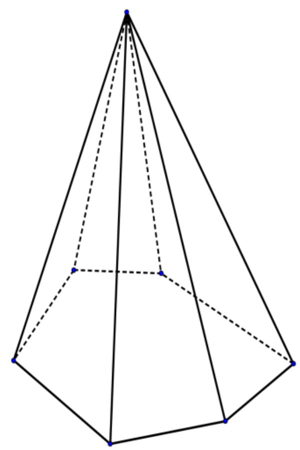
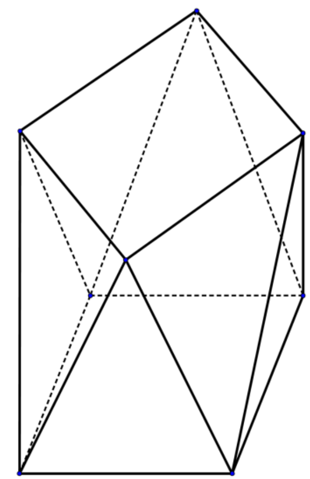
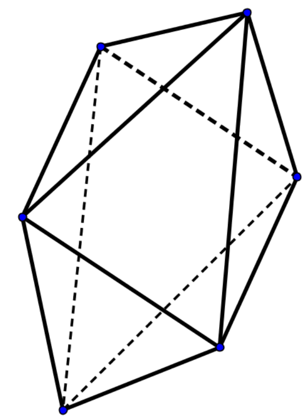
Une très vieille histoire



Ces cinq solides platoniciens datent de plus de 1000 ans avant Platon.

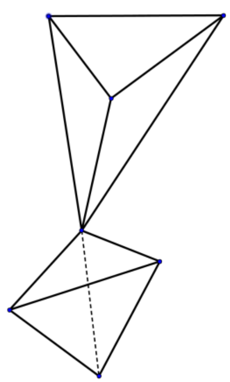
Ashmolean Museum Oxford

Quelques essais convaincants?

Tétraèdre	Prisme à base pentagonale	Pyramide à base hexagonale	Antiprisme à base carrée	Octaèdre régulier
				
4 sommets	10 sommets	7 sommets	8 sommets	6 sommets
6 arêtes	15 arêtes	12 arêtes	16 arêtes	12 arêtes
4 faces	7 faces	7 faces	10 faces	8 faces
$S - a + f = 2$	$S - a + f = 2$	$S - a + f = 2$	$S - a + f = 2$	$S - a + f = 2$

Quelques échecs

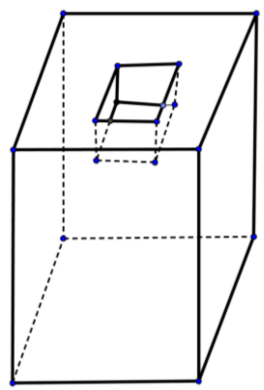
Deux tétraèdres



7 sommets
12 arêtes
6 faces

S –a + f =1

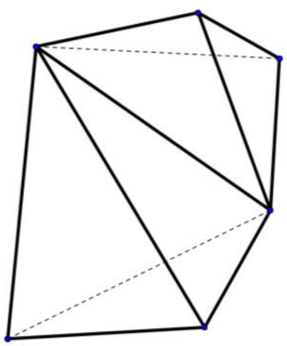
Prisme creusé



16 sommets
24 arêtes
11 faces

S –a + f =3

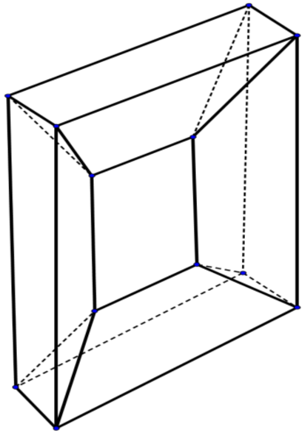
Deux tétraèdres



6 sommets
11 arêtes
8 faces

S –a + f =3

Cadre à bord prismatique

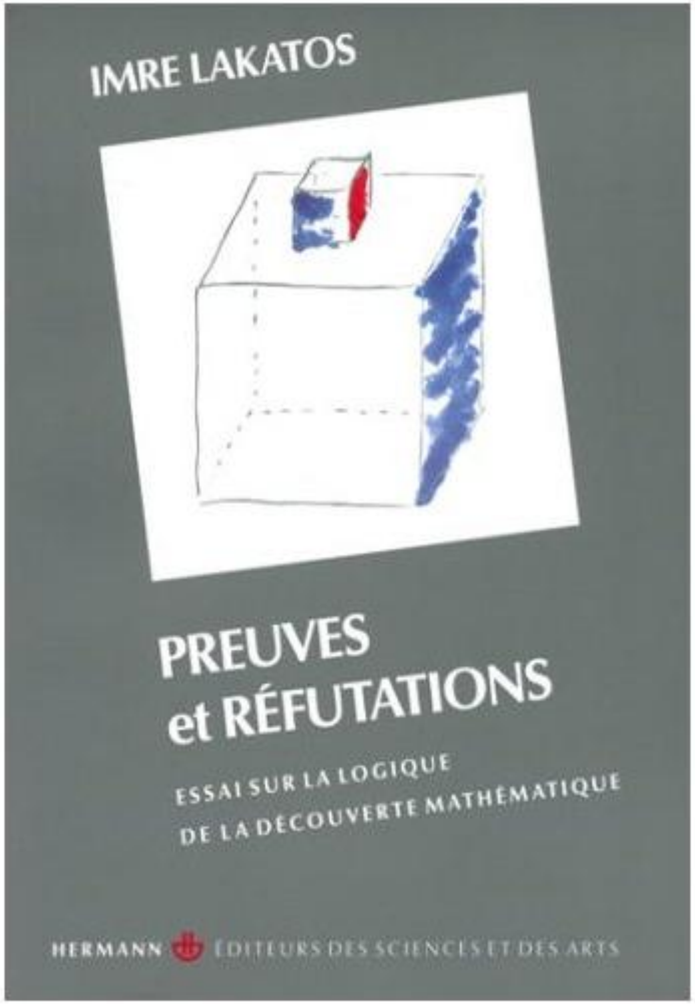


12 sommets
24 arêtes
12 faces

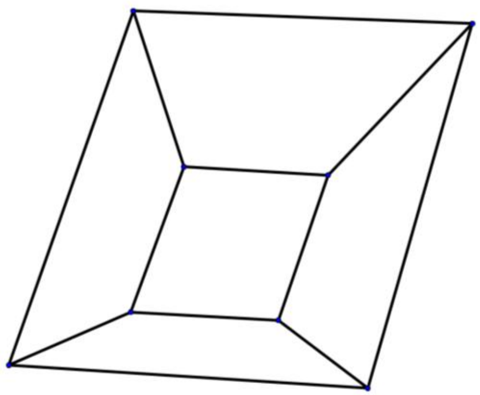
S –a + f =0

Un théorème devient définition

La formule d'Euler (devenue formule d'Euler-Descartes) n'est vraie que pour certains polyèdres. Inutile de chercher à écarter des « cas particuliers », les exemples précédents prouvent qu'on peut obtenir tout entier positif ou négatif comme s – a + f …



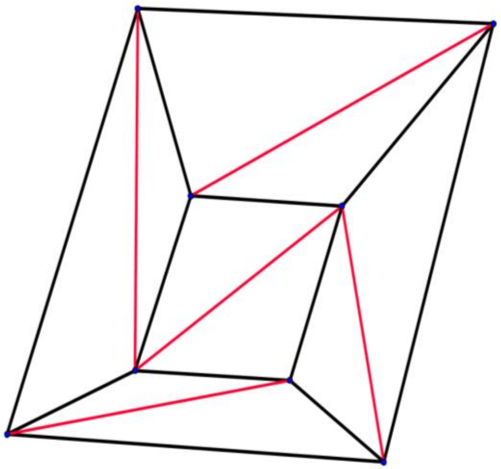
La démonstration de Cauchy (1)



Dans cet exemple, un cube a été « ouvert » par une face, les six autres étant transformées en quadrilatères adjacents

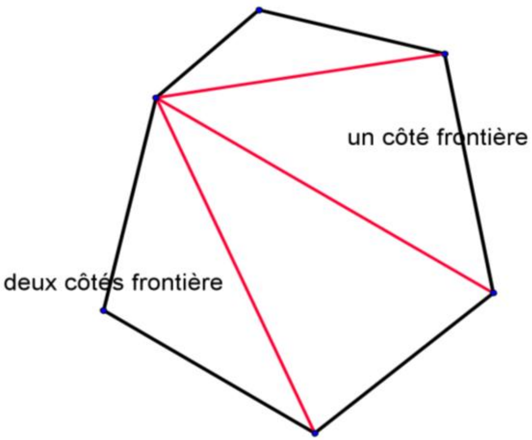
Un polyèdre étant donné, on l'aplatit par déformation continue sur le plan d'une face. On obtient un polygone découpé en régions polygonales correspondant aux anciennes faces. Une face a été perdue dans le processus : on considère qu'elle correspond à la partie du plan restante. Les termes sommets, arêtes, faces s'appliquent à présent à des objets du plan, mais la somme $s - a + f$ demeure.

La démonstration de Cauchy (2)



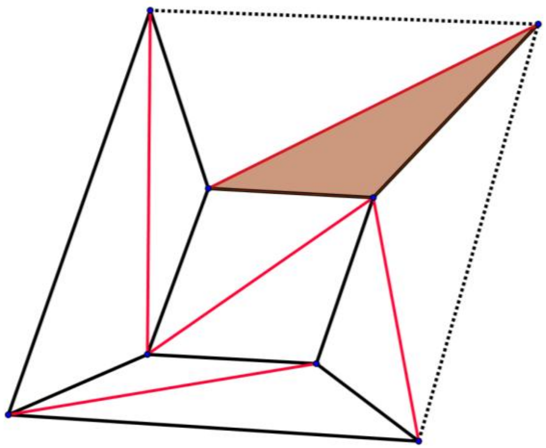
Chacune des « faces » - sauf la face qui occupe le reste du plan - est découpée en triangles. On ajoute autant de faces que d'arêtes, la somme s – a + f demeure.

Tout polygone peut être décomposé en triangles : partant d'un sommet, on choisit en tournant le premier et le second sommets, puis le second et le troisième, etc.



Si on supprime le côté d'un triangle qui est sa frontière avec l'extérieur, on enlève une face et une arête…

La démonstration de Cauchy (3)

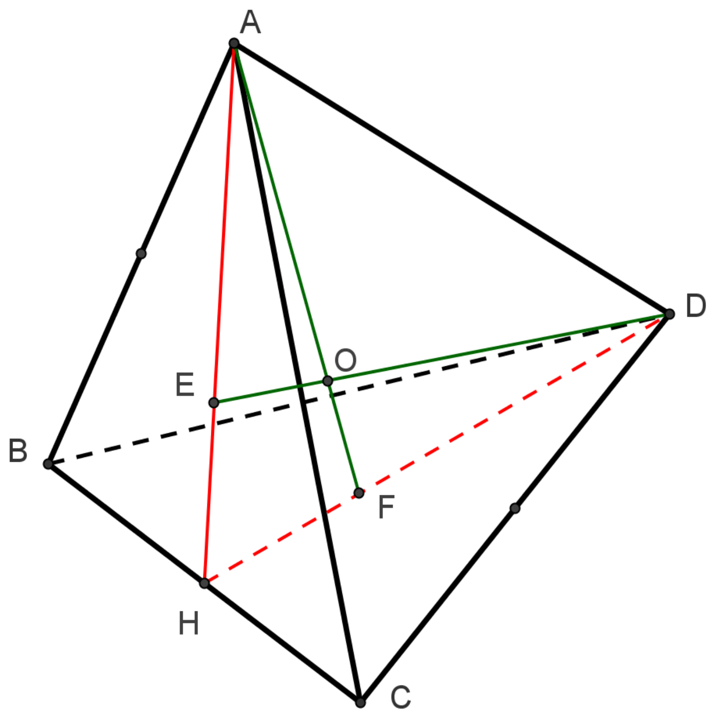


Si on supprime un triangle dont deux côtés constituent la frontière avec l'extérieur, on ôte un sommet, deux arêtes et une face : la somme s – a + f demeure

Et à la fin, que reste-t-il? Un seul triangle : 3 sommets, 3 arêtes, et … une face? Non, deux, il faut compter le grand domaine extérieur pour une face et 3 – 3 + 2 = 2. C'est gagné.

On a supprimé deux triangles dont la frontière avec l'extérieur suivait un seul côté. On regarde ce qui se passe si on en supprime un dont deux côtés sont sur la frontière.

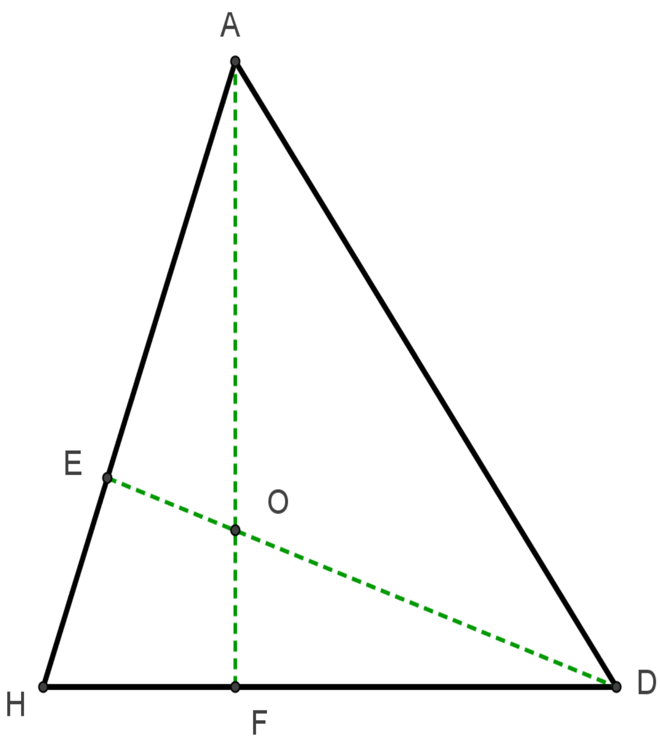
La molécule de méthane



On lit dans certains ouvrages que les centres des atomes d'hydrogène occupent les sommets d'un tétraèdre régulier alors que le centre de l'atome de carbone est le centre du tétraèdre et que l'angle (mesuré) entre deux liaisons C-H est proche de 109°.

Montrons que la première information contient la seconde.

109° 29 min



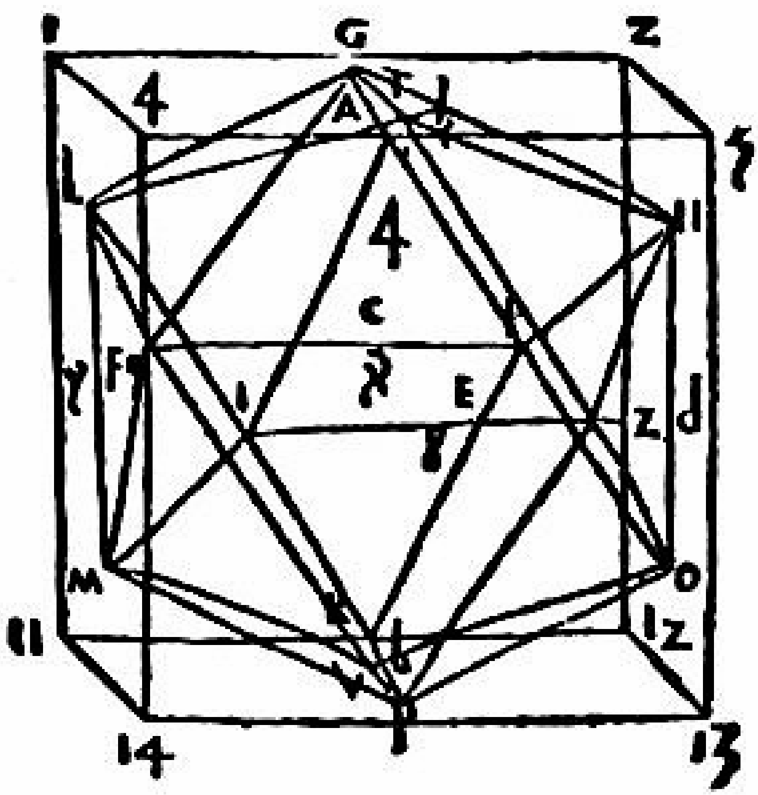
Une fois établi que (AF) est perpendiculaire au plan (BCD), le triangle AHD étant isocèle, la longueur HF est le tiers de AH et donc

$$\cos \widehat{FHA} = \frac{1}{3}$$

Donc $\widehat{FHA} = 70°31\,\text{min}$

Et $\widehat{DOA} = 109°29\,\text{min}$

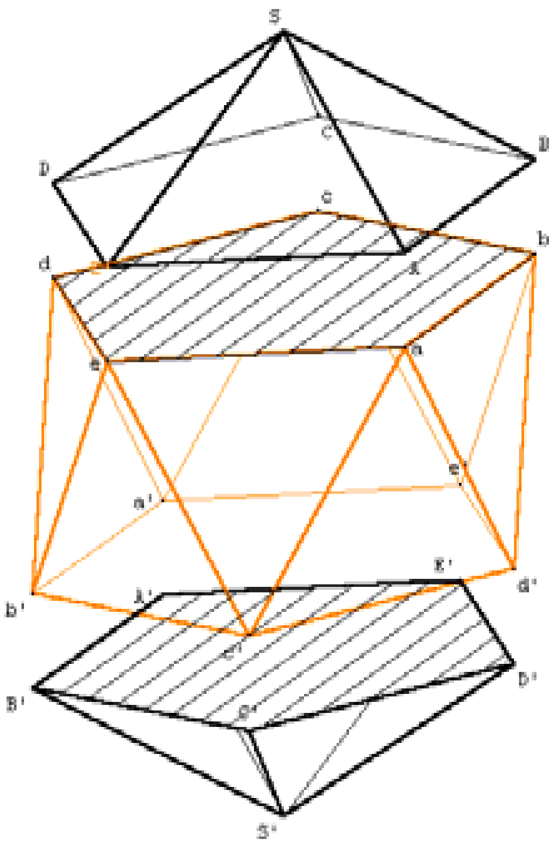
Piero della Francesca, peintre et mathématicien



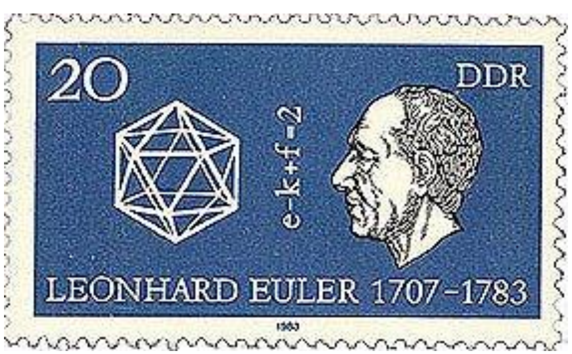
Piero della Francesca (1410?-1492), auteur du *De Prospectiva Pingendi,* reprend l'étude des solides platoniciens dans *De Quinque Corporibus Regularibus.*

L'inscription de l'icosaèdre dans un cube n'avait pas été mentionnée par Euclide.

Etude de l’icosaèdre

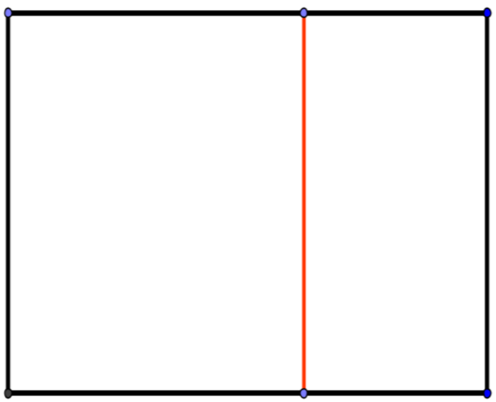


Cette vue montre l’icosaèdre composé de deux pyramides régulières à bases pentagonales et un antiprisme de base identique, et dont les faces sont des triangles équilatéraux.



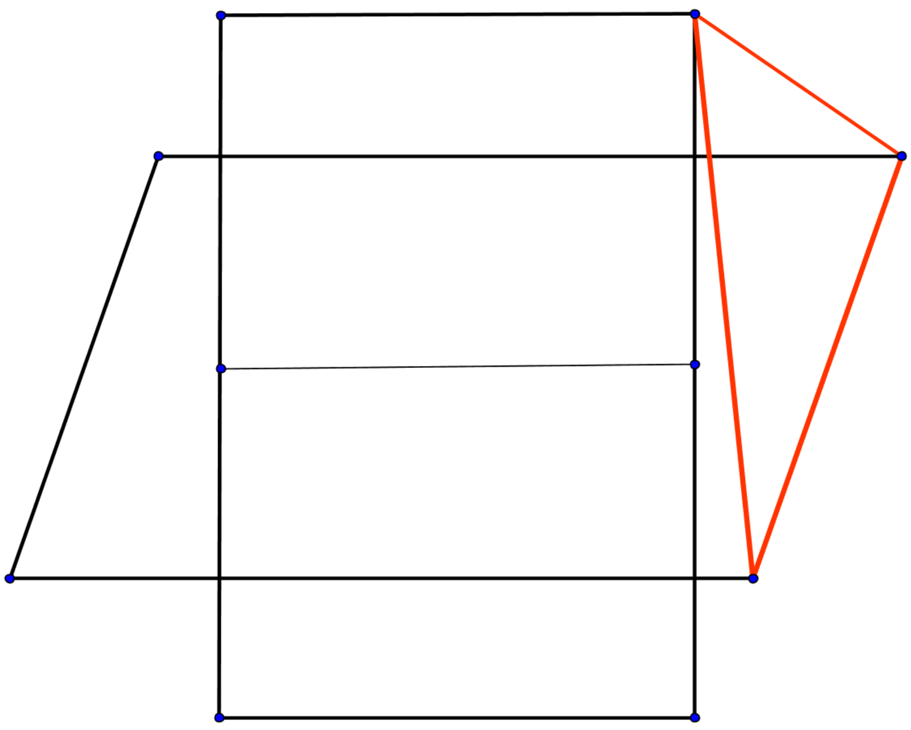
Trois rectangles d'Or … (1)

Un rectangle d'Or



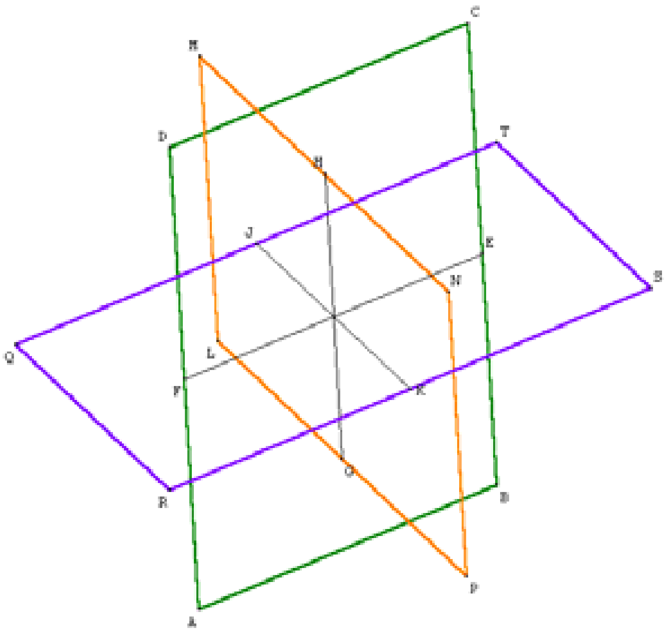
$$\mathbf{j} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Deux rectangles d'Or

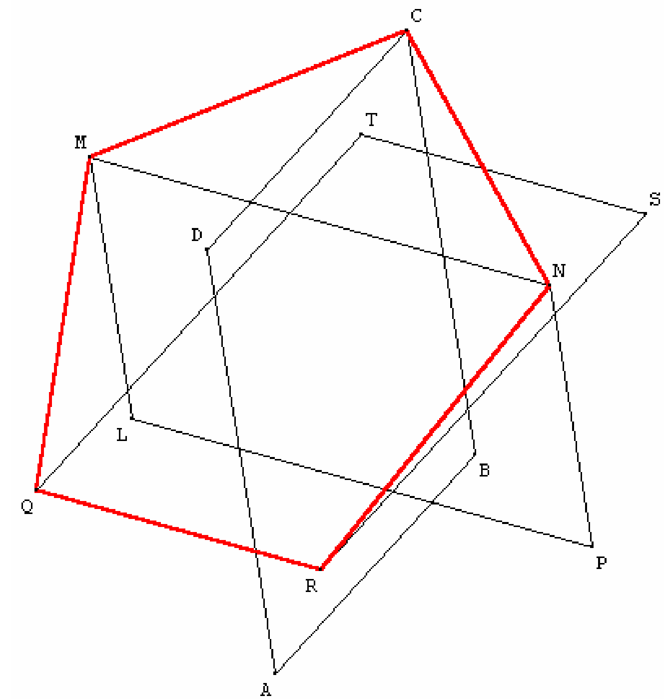


Trois rectangles d'Or … (2)

Trois rectangles d'Or



Exercice supplémentaire



Sources

1. H.S.M. COXETER *Introduction to Geometry*

   Ed. Wiley classic library

2. Imre LAKATOS *Preuves et réfutations*

   Ed. Herrmann