

Notes d'exposé

1 Introduction, mathématiques, sciences, parfum épistémologique

Sciences et critères de vérité, spécificité des mathématiques. Exemple (épuré au risque de la naïveté) de la physique, place de la modélisation. Dans le courant de la démarche :

- place de l'expérience sensible et interrogation des "évidences" qui en sont issues,
- place de l'inventivité et importance de la conceptualisation,
- place de la technique, de la connaissance de théories déjà établies, nécessité des pas de côté.

Illustration par trois exemples.

Encart sur la place des machines dans les mathématiques contemporaines.

Ouverture : aperçu sur un peu de recherche contemporaine.

2 De l'inventivité en mathématiques

Illustration par l'exemple : combien de chemins partent du centre d'un Rubik's cube et visitent tous les 27 petits cubes qui le composent ? La règle : tous les petits cubes doivent être visités une fois et une seule ; le chemin passe d'un petit cube à un petit cube voisin en traversant le centre d'une face.

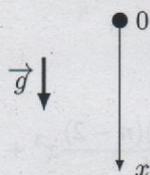
3 De la place de la conceptualisation en mathématiques dans la relation aux autres sciences

Démarche scientifique et simplification à outrance de l'objet étudié. Mesures. Modélisation. Conceptualisation, raisonnements à l'intérieur du modèle. Etablissement de "lois". Vérification de la validité (contextualisée) du modèle, reproductibilité de l'expérience, mesures à nouveau.

Un exemple de la force de la *conceptualisation* dans la démarche scientifique : la chute des corps, Newton² et Galilée².

(i) Mesures (à moins de 4% de précision) : temps, distances, calcul de vitesses moyennes.

(ii) Conceptualiser : modéliser (point massique), inventer le calcul différentiel, définir la vitesse instantanée. Arriver à la conclusion que l'accélération (dérivée seconde) est constante.



$$x''(t) = g$$

$$x'(t) = gt \text{ (avec } v_0 = x'(0) = 0)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (avec } x(0) = 0)$$

(iii) A l'intérieur du modèle, on établit la loi horaire en intégrant deux fois : $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

Conclusion : la durée de la chute pour une hauteur h est $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

(iv) Retour aux mesures pour

²Isaac Newton, Woolsthorpe 1642 – Londres 1727

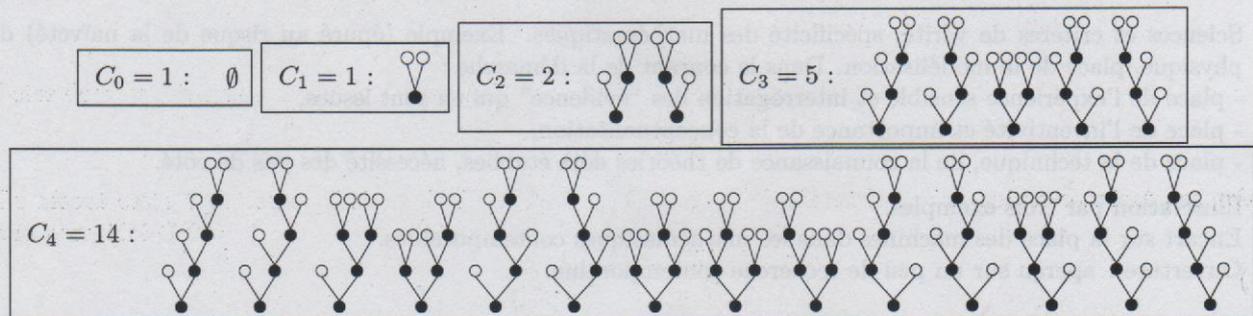
²Galileo Galilei, Pise 1564 – Arcetri 1642

- la mesure de g
- la vérification de la validité du modèle.

(v) Utilisation du modèle pour prévoir des phénomènes (temps de chute, à plus de $10^{-4}\%$ de précision). Extension à d'autres situations. Par exemple, le modèle est applicable à la trajectoire des planètes.

4 De la technique en mathématique : évocation par un exemple

On cherche à compter les arbres binaires enracinés plans à n nœuds internes. Dessin pour montrer ce que signifie binaire plan. On note C_n le nombre d'arbres binaires plans à n nœuds internes (C comme Catalan²). Les premiers nombres :



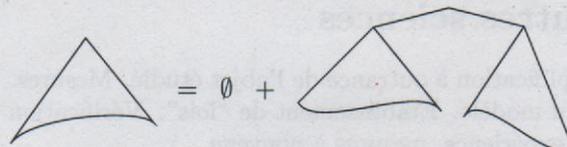
Avec un peu de patience, $C_5 = 42$. Et après ?

Un calcul d'apparence osé, mais qui, en travaillant un peu, trouve une pleine justification.

On note

$$C(x) = \sum_{n \geq 0} C_n x^n.$$

Bref commentaire sur la somme infinie (formelle). Décomposition combinatoire des arbres binaires, faire un dessin.



Cette décomposition combinatoire se traduit par l'égalité fonctionnelle

$$C(x) = 1 + xC(x)^2.$$

On résout cette équation algébrique de degré 2, et on trouve, en éliminant la racine qui ne convient pas grâce à la propriété $C(0) = 1$,

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}. \quad (1)$$

Par ailleurs, formule du binôme : si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

avec la notation $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$, on dit "factorielle n ". Evocation d'une preuve combinatoire, ou par "Guess & Prove". Cette formule se généralise lorsque n n'est pas entier. Deux mots sur la puissance $\frac{1}{2}$ et la racine carrée. On obtient la somme (infinie, formelle ou au voisinage de 0)

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \times \frac{-1}{2}}{2!}x^2 + \dots = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + \dots$$

²Eugène Charles Catalan, Bruges 1814 - Liège 1894

En remplaçant dans la formule (1), on calcule les coefficients C_n qui s'écrivent

$$C_n = \frac{1}{n+1} \times \frac{(2n)!}{n!^2}.$$

On peut maintenant continuer :

$$C(x) = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + 42x^5 + 132x^6 + 429x^7 + 1430x^8 + 4662x^9 + \dots$$

Par exemple, $C_{20} = 6564120420 \approx 6,5 \cdot 10^9$, $C_{30} = 3814986502092304 \approx 3,8 \cdot 10^{15}$, $C_{40} \approx 2,6 \cdot 10^{21}$, $C_{50} \approx 1,9 \cdot 10^{27}$ (regarder, ajouter 10 à l'indice multiplie le nombre d'arbres par 10^6 . Se voit en sachant que C_n grandit approximativement comme une suite géométrique de raison 4, et que $4^{10} \approx 1,04 \cdot 10^6$).

Les C_n sont des nombres très célèbres. Ils comptent beaucoup d'objets : parenthésages, arbres planaires (pas forcément binaires), chemins de Dyck, etc.

Commentaire sur ce comptage, sur la possibilité de la genèse de l'utilisation de séries (formelles) pour dénombrer (heuristique, développement de la théorie), bénéfices et développements. En quoi cet exemple est paradigmatique.

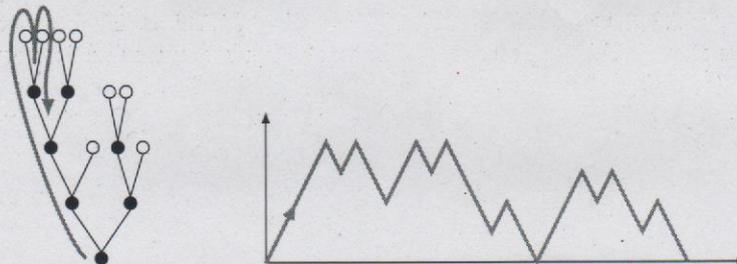
5 Les machines dans les mathématiques contemporaines

La puissance des ordinateurs modifie la recherche en mathématiques par l'apport d'un terrain expérimental nouveau permettant l'énoncé de conjectures, mais aussi en fournissant des outils de preuve.

La machine comme outil de preuve ? Heuristique d'un côté, intervention dans la preuve elle-même de l'autre. De la *vérification* en informatique.

Un exemple : évocation rapide de "Guess & Prove". Puissance du calcul formel.

6 Suite et fin, un aperçu d'un bout de recherche contemporaine



Suite et fin : arbres planaires, chemins de Dyck², équivalence combinatoire (contour), mouvement brownien² (excursion, plutôt) comme "objet limite" continu. Caractère universel du mouvement brownien. Ouverture sur des sciences connexes contemporaines. En particulier, application en informatique : liens entre les algorithmes de tri, les arbres binaires de recherche aléatoires dont on cherche à mesurer les paramètres (coût), la taille et la forme asymptotiques.

²Walther von Dyck, 1856 – 1934

²Robert Brown, botaniste, Montrose 1773 – Londres, 1858