Laboratoire de Mathématiques
BASCAN RAMBOUILLET

Terminale, Spécialité mathématiques

Rappels de première

Malthet Aurélien

Année 2022/2023

Chapitre 1

Le second degré

I. Fonction polynôme du second degré

1) Forme canonique

Définition fonction polynôme du second degré

On appelle *fonction polynôme du second degré* toute fonction admettant une expression développée de la forme :

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

où a, b, c sont des réels avec $a \neq 0$.

Théorème 1.1

Toute fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Il existe deux réels α et β tels que :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta.$$

Avec :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Remarque 1.2

Il faut savoir mettre une fonction polynôme du second degré sous forme canonique.

Exemple 1.3

Soit $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$.

On suppose que $2x^2 - 3x$ est le début d'un carré du type $a^2 - 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned}
2x^2 + 3x &= 2\left[x^2 + \frac{3}{2}x\right] \\
&= 2\left[x^2 + 2 \times \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] \\
&= 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right] \\
&= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}.
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \underbrace{2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}}_{2x^2-3x} + 4 \\
&= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}.
\end{aligned}$$

La forme canonique de f est donc :

$$f(x) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}.$$

2) Variations et représentation graphique

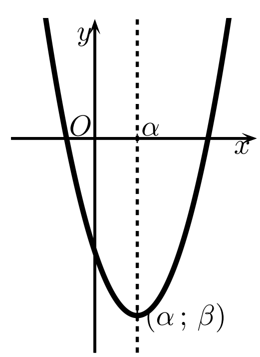
On considère la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$.

Dans un repère orthogonal du plan, la courbe d'une fonction polynôme du second degré est *une parabole*. Elle est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$ et son sommet a pour coordonnées $(\alpha\,;\,\beta)$.

∘ Si $a > 0$

On a :

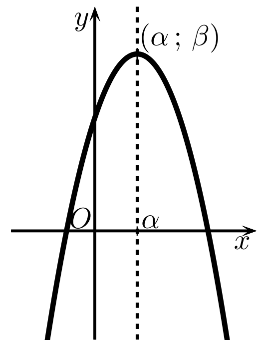
x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	↘	β	↗



○ Si $a < 0$

On a :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$\nearrow$	β	$\searrow$



II. Équation du second degré

1) Définitions

Définition de solution, racine

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.

(i) On appelle *solution de l'équation* $f(x) = 0$ tout réel a de $\mathcal{D}$ tel que $f(a) = 0$.

(ii) On appelle *racine de* f tout réel de $\mathcal{D}$ solution de l'équation $f(x) = 0$.

Définition du discriminant

Soient a, b, c sont des réels et $a \neq 0$.
On appelle *discriminant de* $ax^2 + bx + c$ le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

2) Résolution de l'équation

Théorème 1.4

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$ et Δ est son discriminant.

(i) Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

(ii) Si $\Delta = 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une seule solution appelé solution double qui vaut $x = \dfrac{-b}{2a}$.

(iii) Si $\Delta > 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions simples qui sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\ .$$

3) Factorisation

Corollaire 1.5

Avec les notations du théorème, on a :

(i) Si $\Delta > 0$ sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

(ii) Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c$ se factorise sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2.$$

(iii) Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

4) Relation entre coefficients et racines

Corollaire 1.6

Avec les notations du théorème, on a :

x_1 et x_2 sont des racines de $ax^2 + bx + c$ si, et seulement si, $\begin{cases} x_1 + x_2 & = & \dfrac{-b}{a} \\ x_1 x_2 & = & \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Remarque 1.7

Ce dernier résultat est utile lorsque l'on a une racine évidente.

5) Signe d'un polynôme du second degré

Corollaire 1.8

On considère la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$. On note Δ son discriminant.

(i) Si $\Delta < 0$ alors f est de signe constant et du signe de a sur $\mathbb{R}$.

(ii) Si $\Delta = 0$ alors f est de signe constant et du signe de a sur $\mathbb{R}$ sauf en $\dfrac{-b}{2a}$ où elle s'annule.

(iii) Si $\Delta > 0$ alors f est du signe de a à l'extérieur des racines et de l'opposé du signe de a entre les racines.

III. Prolongement sur les fonctions polynômes

1) Définitions

Définition d'une fonction polynôme

On appelle fonction polynôme toute fonction f définie par :

$$f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

où n est un entier naturel et a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, a_n sont $n+1$ réels appelés coefficients de f.

Si $a_n \neq 0$, alors n est appelé le degré de f et a_n est son coefficient dominant. On note $\deg(f) = n$.

On écrit aussi :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Remarque 1.9

(i) Les fonctions polynômes sont définies sur $\mathbb{R}$ et sur toute partie de $\mathbb{R}$.

(ii) La fonction polynôme nulle est la fonction polynôme dont tous les coefficient sont nuls. On a alors : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

(iii) Les fonctions constantes sont les fonctions polynômes de degré égal à 0. Les fonctions affines sont les fonctions polynômes de degré 1.

Définition d'une fonction rationnelle

On appelle fonction rationnelle tout quotient de fonctions polynômes.

Remarque 1.10

Soit la fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{p(x)}{q(x)}$ où p et q sont des fonctions polynômes.

Alors f est définie sur l'ensemble des réels x tels que $q(x) \neq 0$.

2) Égalité de polynômes

Théorème 1.11

Deux fonctions polynômes non nulles sont égales si, et seulement si, elles ont le même degré et les coefficients de leurs forme développées sont deux à deux égaux.

Autrement dit, si $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ et $g(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$ où m et n sont des entiers naturels alors :

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; m = n$ et pour tout entier k compris entre 0 et n, $a_k = b_k$.

Remarque 1.12

Ce théorème est admis.

3) Racines d'un polynôme

Théorème 1.13

Soit f une fonction polynôme avec $\deg(f) \geq 1$ et a un réel.

a est une racine de f si, et seulement si, il existe une fonction polynôme g telle que, pour tout réel x, $f(x) = (x - a)g(x)$ avec $\deg(g) = \deg(f) - 1$.

Remarque 1.14

Ce théorème est admis.

Chapitre 2

Les suites

I. Définition

Définition d'une suite numérique réelle

Une *suite numérique réelle* est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, ou sur $\mathbb{N}$ privé de ses premiers termes, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) = u_n. \end{array}$$

u sera également notée $(u_n)_{n \geq k}$ ($k \in \mathbb{N}$) ou, plus simplement (u_n) lorsque le premier terme est u_0 ; u_n s'appelle *le terme général de la suite* ou *le terme de rang* n (ou d'*indice* n).

Remarque 2.1

Dans la suite, on supposera que les suites sont définies à partir du rang 0.

Remarque 2.2

On donne ici les deux méthodes les plus courantes pour définir une suite.

(1) Suite définie par une formule explicite qui dépend de n : $u_n = f(n)$

On considère la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1 > 0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe. Donc la suite

(u_n) est définie à partir du rang 0.
Si l'on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ alors :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n).$$

(2) Suite définie par une formule de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère la suite dont le terme général vérifie $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n^2+1}$.

Si l'on considère la fonction f précédente alors :

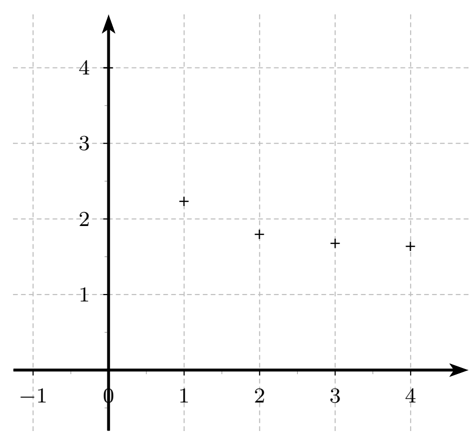
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Comme la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ alors la suite (u_n) est bien définie : on peut calculer l'image de n'importe quel terme de la suite (u_n) par la fonction f.
Pour calculer les termes de la suite (u_n), on devra également connaître la valeur du premier terme de la suite. On sera très prudent avec les suites définies par récurrence : si f est définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ alors, pour que (u_n) soit correctement définie, on devra vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in D$.

II. Représentation graphique des suites

Définition de la représentation graphique d'une suite

Soit (u_n) une suite de réels.
Dans le plan muni d'un repère, la représentation graphique de (u_n) est le nuage de points de coordonnées $(n\,;\,u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.



Remarque 2.3

Concernant les suites (u_n) définies par récurrence :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est une fonction définie sur un ensemble D et avec $u_0 \in D$, on peut aussi les représenter sur un axe. On procède comme suit :

- on trace la droite Δ d'équation $y = x$ et la courbe de f ;
- on place u_0 sur l'axe des abscisses puis le point de la courbe de f d'abscisse u_0 ; son ordonnée est $f(u_0) = u_1$;
- on construit le point de la droite Δ d'ordonnée u_1 ; son abscisse est u_1 et on a construit u_1 sur l'axe des abscisses.

On itère le procédé pour obtenir u_2, u_3, ...

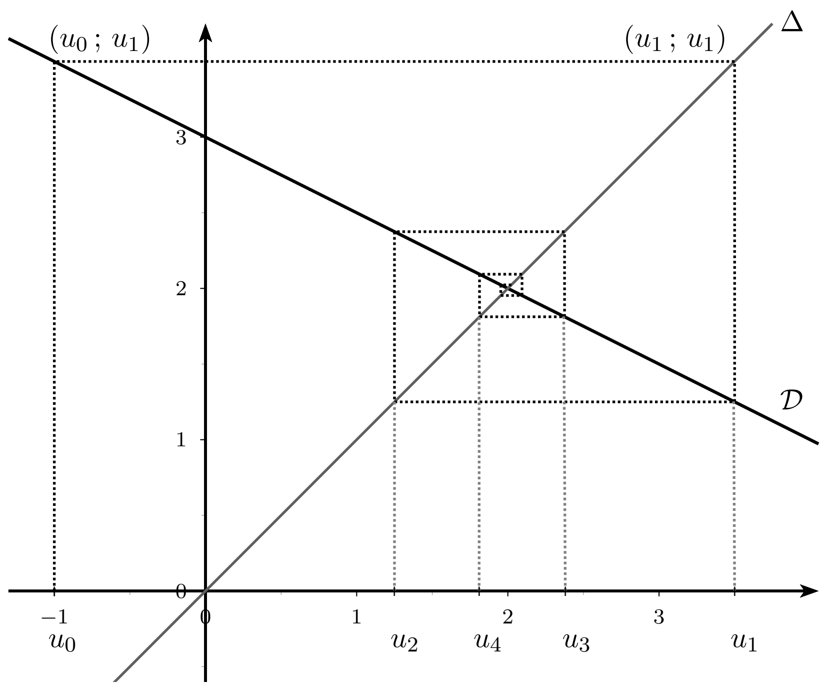
Exemple 2.4

Soit (u_n) définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{-1}{2}u_n + 3$.

On trace la droite $\mathcal{D}$ représentant $f : x \mapsto \dfrac{-1}{2}x + 3$.

On trace la droite Δ d'équation $y = x$.

On place $u_0 = -1$ sur l'axe des abscisses puis on construit le point d'abscisse u_1 comme expliqué ci-dessus : on construit le point de la droite $\mathcal{D}$ d'abscisse u_0 ; son ordonnée est $f(u_0) = u_1$. Puis on construit le point de Δ d'ordonnée u_1 ; son abscisse est u_1 et on obtient u_1 sur l'axe des abscisses.



III. Suites arithmétiques et géométriques

1) Les suites arithmétiques

Définition d'une suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique si, et seulement si, il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
r s'appelle *la raison* de la suite.

Proposition 2.5

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :

(i) si u_0 est le premier terme, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr.$$

(ii) si u_k est le premier terme ($k \in \mathbb{N}$), on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ n \geq k,\ u_n = u_k + (n-k)r.$$

Remarque 2.6

Ce dernier résultat permet de passer de la formule de définition par récurrence à une formule explicite du terme général.

Proposition 2.7

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la relation :

$$S = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times \text{nombre de termes}}{2}.$$

Plus particulièrement, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2) Les suites géométriques

Définition d'une suite géométrique

Une suite (u_n) est géométrique si, et seulement si, il existe un réel non nul q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.
q s'appelle *la raison* de la suite.

Proposition 2.8

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors :

(i) si u_0 est le premier terme, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n.$$

(ii) si u_k est le premier terme ($k \in \mathbb{N}$), on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ n \geq k,\ u_n = u_k q^{n-k}.$$

Remarque 2.9

Ce dernier résultat permet de passer de la formule de définition par récurrence à une formule explicite du terme général.

Proposition 2.10

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q \neq 1}$ est donnée par la relation :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}.$$

Plus particulièrement, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

IV. Suites monotones

Définition de suites monotones

Soit (u_n) une suite.

(i) La suite (u_n) est *strictement croissante* si, et seulement si, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}.$$

(ii) La suite (u_n) est *strictement décroissante* si, et seulement si, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}.$$

(iii) La suite (u_n) est *strictement monotone* si, et seulement si, elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

(iv) La suite (u_n) est *constante* si, et seulement si, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = u_{n+1}.$$

Remarque 2.11

Dans le cas où la suite est simplement croissante ou décroissante, on remplacera les inégalités strictes ($<$) par des inégalités larges ($\leq$).

Remarque 2.12

De manière générale, pour déterminer la monotonie d'une suite, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Une suite dont le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ ne serait pas constant sera dite non monotone.
Dans le cas où la suite est définie par une formule explicite en fonction de n de la forme $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$, on pourra étudier le sens de variations de la fonction f :

(i) si f est (strictement) croissante sur $[0; +\infty[$ alors (u_n) est (strictement) croissante ;

(ii) si f est (strictement) décroissante sur $[0; +\infty[$ alors (u_n) est (strictement) décroissante.

La réciproque de ce résultat est fausse.

Proposition 2.13

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

(i) (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, $r > 0$.

(ii) (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, $r < 0$.

(iii) (u_n) est constante si, et seulement si, $r = 0$.

Proposition 2.14

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme $u_0 > 0$.

(i) (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, $q > 1$.

(ii) (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, $0 < q < 1$.

(iii) (u_n) est constante si, et seulement si, $q = 1$.

(iv) (u_n) n'est pas monotone si, et seulement si, $q < 0$.

Remarque 2.15

Dans la proposition, on a supposé $u_0 > 0$. Si $u_0 < 0$ alors on a :

(i) (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, $q > 1$;

(ii) (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, $0 < q < 1$.

Les autres cas restent inchangés.

Chapitre 3

La dérivation

I. Fonction dérivable en un point

1) Nombre dérivé

Dans tout le paragraphe, f désigne une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a est un réel de I.

Définition du taux d'accroissement de *f*

Pour tout réel $x \neq a$, on appelle *taux d'accroissement de f en a* le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
Ou encore :
pour tout réel $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$, *le taux d'accroissement de f en a* est le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Définition d'une fonction dérivable en *a*

f est dite dérivable en a si, et seulement si, le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a.
Lorsque f est dérivable en a, la limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est notée $f'(a)$ et s'appelle *le nombre dérivé de f en a*.
On écrira également $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.

Exemple 3.1

Un exemple à connaître : on considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$ et $a\in]0;+\infty[$.
Remarquons tout d'abord que $\sqrt{x}+\sqrt{a}>0$ car $x>0$ et $a>0$.

On rappelle que $\sqrt{x}+\sqrt{a}$ est *l'expression conjuguée* de $\sqrt{x}-\sqrt{a}$.

On a :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\\ &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Donc f est dérivable en tout réel $a\in]0;+\infty[$ et on a $f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Interprétation graphique 3.2

On se place dans un repère du plan.

On note $\mathcal{C}$ la courbe de f où f est une fonction supposée dérivable en a.

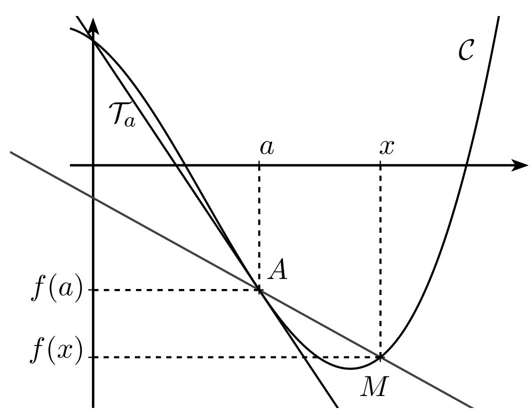
Pour $x\neq a$ dans I, le quotient $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur de la droite (MA) où $M(x;f(x))$, et $A(a;f(a))$ sont des points de $\mathcal{C}$.

Lorsque x tend vers a, le coefficient directeur $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ de (MA) tend vers $f'(a)$ car f est dérivable en a.

La droite $\mathcal{T}_a$ passant pas le point A et de coefficient directeur $f'(a)$ a pour équation réduite :

$$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a).}$$

Cette droite est appelée *tangente à la courbe de f au point A*.

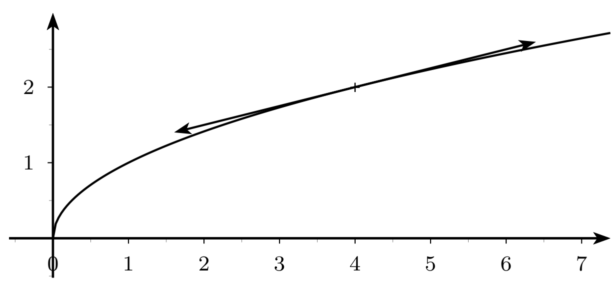


Exemple 3.3

On reprend la fonction racine carrée de l'exemple 1. Déterminons l'équation réduite de la tangente à la courbe de f en 4 :

$$\begin{aligned} y &= f'(4)(x-4)+f(4) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{4}}(x-4)+\sqrt{4} \\ &= \frac{1}{4}(x-4)+2 \\ &= \frac{1}{4}x+1. \end{aligned}$$

L'équation réduite de la tangente à la courbe de f en 2 est $y = \dfrac{1}{4}x + 1$.



La tangente est symbolisée par la double flèche.

Remarque 3.4

De manière général, lorsque l'on se pose la question de la dérivabilité d'une fonction en un réel donné, on devra toujours calculer la limite du taux d'accroissement. Cette méthode sera également utilisée pour déterminer l'expression des fonctions dérivées que l'on découvrira dans la partie suivante.

Exemple 3.5

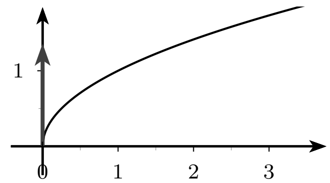
Deux exemples de fonction non dérivables en un point à connaître.

(1) On considère la fonction racine carrée de l'exemple 3.1.
On a déjà démontré que cette fonction est dérivable en tout réel strictement positif. Étudions maintenant sa dérivabilité en 0.

Soit $x \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{\sqrt{x}}{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. Donc, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 mais sa courbe admet *une demi-tangente verticale en 0*.



(2) Soit f la fonction définie par $f(x) = |x|$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$.
Étudions sa dérivabilité en un réel a donné.

∘ On suppose que $a \neq 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq a$, x et a du même signe. On a :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{|x|-|a|}{x-a}\\ &= \begin{cases} \dfrac{x-a}{x-a} & \text{si } a>0\\ \dfrac{-x+a}{x-a} & \text{si } a<0\end{cases}\\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } a>0\\ -1 & \text{si } a<0\end{cases}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\text{si } a>0, \text{ alors } \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 1,$$
$$\text{si } a<0 \text{ alors } \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -1.$$

On en conclut que la fonction valeur absolue est dérivable en tout réel $a > 0$ et $f'(a) = 1$ puis qu'elle est dérivable en tout réel $a < 0$ et $f'(a) = -1$.

∘ On suppose que $a = 0$

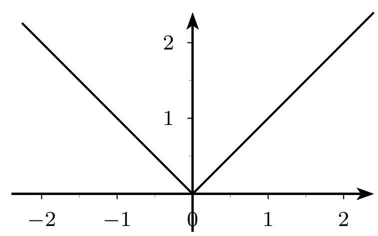
Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{|x|}{x}\\ &= \begin{cases} \dfrac{x}{x} & \text{si } x>0\\ \dfrac{-x}{x} & \text{si } x<0\end{cases}\\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x>0\\ -1 & \text{si } x<0\end{cases}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1.$$

On en déduit que f est dérivable à gauche et à droite en 0 et que $f'_g(0) = -1$, $f'_d(0) = 1$.
Comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ alors la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.



II. Fonctions dérivables sur un intervalle

1) Définition

Définition de fonction dérivable sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
f est dérivable sur I si, et seulement si, f est dérivable en tout point de I.
Dans ce cas, la fonction qui, à tout réel x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée *fonction dérivée de f*.
Elle est définie sur I et est notée f'.

Exemple 3.6

On a démontré précédemment que la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$ est dérivable en tout réel x de $]0\,;+\infty[$. Elle est donc dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a :

$$\text{pour tout réel } x \in]0\,;+\infty[,\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Remarque 3.7

La définition ci-dessus s'étend à toute fonction définie sur une réunion D d'intervalles par :
f est dérivable sur D si, et seulement si, f est dérivable en tout point de D.

2) Fonctions dérivées des fonctions de référence

On a le tableau suivant :

Fonction $f(x) = \ldots$	**Fonction dérivée** $f'(x) = \ldots$	**Ensemble de dérivabilité**
a où $a \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$ax + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$	a	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Ce tableau sera complété dans les chapitres suivants. On a déjà démontré en partie ces résultats dans les paragraphes suivants.
La troisième ligne du tableau peut être décomposée en deux lignes comme ci-dessous :

Fonction $f(x) = \ldots$	**Fonction dérivée** $f'(x) = \ldots$	**Ensemble de dérivabilité**
x^n, $n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

3) Opérations sur les fonctions dérivables

Les démonstrations de ce paragraphe sont à connaître.

Dans toute la suite, u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I.

Théorème 3.8

(i) La fonction $u + v$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

$$(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x).$$

(ii) Pour tout réel λ, la fonction λu est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$(\lambda u)'(x) = \lambda u'(x).$$

Preuve

Pour démontrer tous ces résultats, il faut revenir à la définition de la dérivabilité en un point.
Soit $a \in I$ et $x \in I \setminus \{a\}$.

(i) On a :

$$\begin{aligned}\frac{(u+v)(x)-(u+v)(a)}{x-a} &= \frac{u(x)+v(x)-u(a)-v(a)}{x-a}\\ &= \frac{u(x)-u(a)+v(x)-v(a)}{x-a}\\ &= \frac{u(x)-u(a)}{x-a}+\frac{v(x)-v(a)}{x-a}.\end{aligned}$$

Or u et v sont dérivables en a donc :

$$\lim_{x\to a} \frac{u(x)-u(a)}{x-a} = u'(a) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \frac{v(x)-v(a)}{x-a} = v'(a).$$

Donc, par somme, on a :

$$\lim_{x\to a} \frac{u(x)-u(a)}{x-a}+\frac{v(x)-v(a)}{x-a} = u'(a)+v'(a).$$

On en déduit que la fonction $u+v$ est dérivable en tout a de I et on a :

$$(u+v)'(a) = u'(a)+v'(a).$$

Donc $u+v$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

$$(u+v)'(x) = u'(x)+v'(x).$$

(ii) On a :

$$\begin{aligned}\frac{(\lambda u)(x)-(\lambda u)(a)}{x-a} &= \frac{\lambda u(x)-\lambda u(a)}{x-a}\\ &= \lambda\,\frac{u(x)-u(a)}{x-a}.\end{aligned}$$

Or u est dérivable en a donc :

$$\lim_{x\to a} \frac{u(x)-u(a)}{x-a} = u'(a).$$

Donc, on a :

$$\lim_{x\to a} \lambda\,\frac{u(x)-u(a)}{x-a} = \lambda u'(a).$$

On en déduit que la fonction λu est dérivable en tout a de I et on a :

$$(\lambda u)'(a) = \lambda u'(a).$$

Donc λu est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

$$(\lambda u)'(x) = \lambda u'(x).$$

Théorème 3.9

(i) $u \times v$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

$$(u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

(ii) Si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = \frac{-v'(x)}{(v(x))^2}.$$

(iii) Si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}.$$

Preuve

(i) On a :

$$\begin{aligned}
\frac{(u \times v)(x) - (u \times v)(a)}{x-a} &= \frac{u(x)v(x) - u(a)v(a)}{x-a} \\
&= \frac{u(x)v(x) - u(a)v(x) + u(a)v(x) - u(a)v(a)}{x-a} \\
&= \frac{(u(x) - u(a))\,v(x) + u(a)\,(v(x) - v(a))}{x-a} \\
&= \frac{u(x) - u(a)}{x-a}v(x) + u(a)\frac{v(x) - v(a)}{x-a}.
\end{aligned}$$

Or u et v sont dérivables en a donc :

$$\lim_{x \to a} \frac{u(x) - u(a)}{x-a} = u'(a) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \frac{v(x) - v(a)}{x-a} = v'(a)$$

puis on admet que $\lim\limits_{x \to a} v(x) = v(a)$ (on dit que v est continue en a).
Donc, par produit et somme des limites, on a :

$$\lim_{x \to a} \frac{(u \times v)(x) - (u \times v)(a)}{x-a} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a).$$

On en déduit que la fonction $u \cdot v$ est dérivable en tout a de I et on a :

$$(u \times v)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a).$$

Donc $u \times v$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

$$(u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

(ii) On suppose que v ne s'annule pas sur I. On a :

$$\frac{\left(\frac{1}{v}\right)(x) - \left(\frac{1}{v}\right)(a)}{x-a} = \frac{\frac{v(a)-v(x)}{v(x)v(a)}}{x-a} = -\frac{v(x)-v(a)}{(x-a)} \times \frac{1}{v(x)v(a)}.$$

Comme v est dérivable en a alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{v(x)-v(a)}{(x-a)} = v'(a)$.
De plus, $\lim\limits_{x\to a} -\dfrac{1}{v(x)v(a)} = \dfrac{-1}{(v(a))^2}$.
Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\left(\frac{1}{v}\right)(x) - \left(\frac{1}{v}\right)(a)}{x-a} = -\dfrac{v'(a)}{(v(a))^2}$.
On en déduit que $\dfrac{1}{v}$ est dérivable en tout $a \in I$ et on a :

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = -\frac{v'(a)}{(v(a))^2}.$$

D'où, $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = \frac{-v'(x)}{(v(x))^2}.$$

(iii) Si v ne s'annule pas sur I, on applique (i) et (ii) en considérant que $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$.
Alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}.$$

Corollaire 3.10

Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
Les fonctions rationnelles (quotients de fonctions polynômes) sont dérivables sur leur ensemble de définition et sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

Théorème 3.11

Soient a, b des réels avec $a \neq 0$ et la fonction u définie et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
Alors, la fonction $f : x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable sur l'ensemble J des réels x tels que $ax+b \in I$ et on a :

$$\text{pour tout } x \in J,\ f'(x) = au'(ax+b).$$

III. Variations et extremums des fonctions dérivables

1) Variations des fonctions dérivables

Théorème 3.12

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

(i) Si f est croissante sur I alors, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.

(ii) Si f est décroissante sur I alors, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

(iii) Si f est constante sur I alors, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Théorème 3.13

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

(i) Si, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) > 0$ sauf peut-être en un nombre fini de points où f' s'annule alors f est strictement croissante sur I.

(ii) Si, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) < 0$ sauf peut-être en un nombre fini de points où f' s'annule alors f est strictement décroissante sur I.

(iii) Si, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Remarque 3.14

Dans la pratique, après avoir justifié de la dérivabilité de la fonction, on calculera sa fonction dérivée puis on étudiera son signe. Ce dernier théorème nous donnera les variations de la fonction étudiée.

2) Extremums des fonctions dérivables

Définition d'extremum local

Soient f un fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et $a \in D$.

(i) f admet un minimum local en a si, et seulement si, il existe un intervalle ouvert I inclus dans D et contenant a tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$.

(ii) f admet un maximum local en a si, et seulement si, il existe un intervalle ouvert I inclus dans D et contenant a tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$.

(iii) f admet un extremum local en a si, et seulement si, elle admet un minimum local ou un maximum local en a.

Théorème 3.15

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Remarque 3.16

La réciproque de ce théorème est fausse. On en donne un contre-exemple ci-après.

Si l'on considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ alors, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$.
Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) > 0$ et $f'(0) = 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. f n'admet donc pas d'extremum en 0 et pourtant, $f'(0) = 0$.

Théorème 3.17

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
Si f' s'annule en a en changeant de signe sur I alors f admet un extremum local en a sur I.
Autrement dit :

(i) si, $f'(a) = 0$ et $f'(x) < 0$ pour $x < a$ dans I et $f'(x) > 0$ pour $x > a$ dans I, alors f admet un minimum en a ;

(ii) si, $f'(a) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > a$ dans I et $f'(x) < 0$ pour $x < a$ dans I, alors f admet un maximum en a.

Chapitre 4

La fonction exponentielle

I. Définition et premières propriétés

1) Définition

Définition de la fonction exponentielle

L'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ s'appelle *la fonction exponentielle*. On la note exp.

Propriété 4.1

(i) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)\exp(-x) = 1$ et $\exp(x) \neq 0$;

(ii) exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$;

(iii) $\exp(0) = 1$.

2) Propriétés algébriques

a) La relation fonctionnelle

Propriété 4.2

Pour tous réels x et y, on a :

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

b) Conséquences

Propriété 4.3

Pour tous réels x et y, on a :

(i) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$;

(ii) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$;

(iii) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$;

(iv) $\exp(x) > 0$;

(v) $\exp\left(\dfrac{1}{2}x\right) = \sqrt{\exp(x)}$.

Remarque 4.4

Ces relations vont nous permettre de transformer l'expression d'une fonction donnée pour la mettre sous une forme plus facilement manipulable en vue de la dériver, de calculer ses limites...

c) Le nombre e : une nouvelle notation

D'après la relation (iii) de la propriété 5.7, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{Z},\ \exp(n) = \exp(1)^n.$$

Dorénavant, on note e le réel $\exp(1)$.

La calculatrice nous donne $e \approx 2,718281828$. C'est un nombre irrationnelle.

On obtient alors la propriété suivante :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{Z},\ \exp(n) = e^n.}$$

Cette propriété reste vraie pour les nombres rationnels :

$$\boxed{\text{pour tout } r \in \mathbb{Q},\ \exp(r) = e^r.}$$

On étend ensuite cette notation aux nombres réels ; cette généralisation est admise :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = e^x.}$$

On peut alors retranscrire les propriétés 4.6 et 4.7 à l'aide de cette nouvelle notation.

Propriété 4.5

Pour tous réels x et y, on a :

(i) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$;

(ii) $e^{x+y} = e^x e^y$;

(iii) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$;

(iv) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e^{nx} = (e^x)^n$;

(v) $e^{\frac{1}{2}x} = \sqrt{e^x}$.

Dans tout ce qui suit, on considère maintenant la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\exp(x) = e^x.$$

II. Étude de la fonction exponentielle

1) Variations de la fonction exponentielle

On rappelle les deux résultats suivants.

Proposition 4.6

(i) exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

Corollaire 4.7

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquence 4.8

On déduit des variations les propriétés suivantes.
Pour tous réels x, y, on a :

(i) $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$;

(ii) $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$;

(iii) $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$.

Remarque 4.9

Ces deux derniers points vont nous permettre de résoudre des équations ou des inéquations

2) Étude locale au voisinage de 0

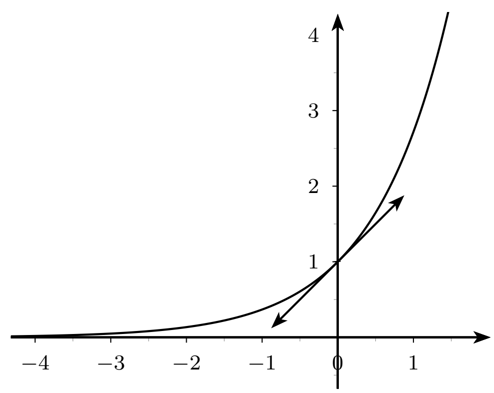
Proposition 4.10

On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Conséquence 4.11

Graphiquement, cette limite signifie que la tangente à la courbe de exp au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 1. Son équation réduite est $y = x + 1$.

On donne ci-dessous le représentation graphique de la fonction exp avec sa tangente en 0 :



III. Dérivée de $x \mapsto e^{ax+b}$

Proposition 4.12

La fonction $f : x \mapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = ae^{ax+b}.$$

Chapitre 5

Probabilités

I. Conditionnement

Définition de probabilité conditionnelle

Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire et P une loi de probabilité sur Ω. On considère deux événements A et B, B de probabilité non nulle.
La probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé est le réel noté $P_B(A)$ (ou $P(A/B)$) et défini par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Conséquence 5.1

Pour tous événements A et B de probabilités non nulles, on obtient immédiatement les relations suivantes :

(i) $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$;

(ii) $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.

Remarque 5.2

Soit A un événement de probabilité non nulle.
Si l'événement A est réalisé, l'univers de l'expérience est alors A et la loi de probabilité sur A, notée P_A, est une loi déduite de P appelée *probabilité sachant A*.

Propriété 5.3

Soit A un événement de probabilité non nulle et B un événement. On a :

(i) $P_A(A) = 1$;

(ii) $P_A(\emptyset) = 0$;

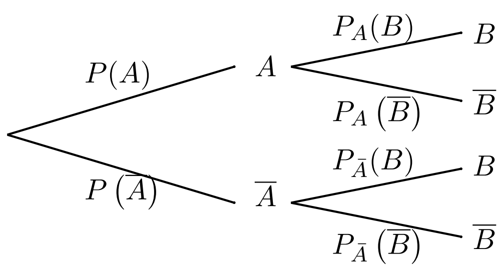
(iii) $P_A(B) + P_A\left(\overline{B}\right) = 1$.

Remarque 5.4

Pour décrire une expérience aléatoire comportant des probabilités conditionnelles, il est intéressant de construire un arbre pondéré tel que :

(i) dans l'arbre, une branche (un segment) relie deux nœuds. Sur chaque branche, on indique la probabilité correspondante ;
(ii) la somme des probabilités portées par les branches issues d'un même nœud est 1 ;
(iii) un chemin est une suite de branches ; la probabilité d'un chemin est celle de l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin ; elle s'obtient en multipliant les probabilités portées par les branches.

On donne ci-dessous le cas d'un arbre avec deux événements A et B.



II. Formule des probabilités totales

Définition d'un système complet d'événements

Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire et $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ n événements de probabilités non nulles ($n \in \mathbb{N}^*$).

$(A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n)$ *est un système complet d'événements* si, et seulement si, on a :

(i) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$;

(ii) pour tous entiers $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$.

En termes ensemblistes, on dit aussi que $(A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n)$ est *une partition de* Ω.

Théorème 5.5

Soient $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ un système complet d'événements ($n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$) et B un événement. On a :

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n)P_{A_n}(B).$$

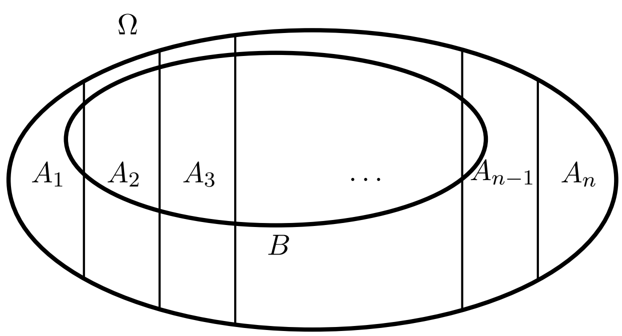
Pour deux événements A et $\overline{A}$, on a :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\bar{A}}(B).$$

Remarque 5.6

Bien souvent, lorsque l'on étudie une expérience aléatoire, on ne connaît un événement B qu'« à travers le système complet d'événements (ou la partition) $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ ». On pensera à construire un arbre de probabilités pour illustrer le problème ; il suffira à justifier que l'on a un système complet d'événements. La formule des probabilités totales nous permet alors de calculer la probabilité de B comme dans l'exemple suivant.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ et i, j des entiers tels que $1 \leq i \leq n$, et $1 \leq j \leq n$ avec $i \neq j$.



B est la réunion des événements incompatibles $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$, $\ldots$, $A_n \cap B$.

III. Variable aléatoire et loi de probabilité

1) Définitions

Définition d'une variable aléatoire

On appelle *variable aléatoire discrète* une application qui, à chaque issue d'une expérience aléatoire d'univers fini associe un nombre réel.

Définition de la loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définir *la loi de probabilité d'une variable aléatoire* X, c'est définir une loi de probabilité sur l'ensemble des valeurs prises pas X.

2) Espérance et variance d'une variable aléatoire

Définition de l'espérance d'une variable aléatoire

On considère une variable aléatoire X qui prend pour valeurs les réels $x_1, x_2, \cdots, x_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et de loi de probabilité P.
On appelle *espérance de la variable aléatoire* X le réel noté $E(X)$ tel que :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) \cdot x_k = P(X = x_1) \cdot x_1 + \cdots + P(X = x_n) \cdot x_n.$$

Remarque 5.7

(i) L'espérance est la valeur moyenne prise par X au cours de l'expérience.

(ii) L'espérance d'une variable aléatoire X s'exprime dans la même unité que les valeurs prises par X.

(iii) Si X représente le gain d'un jeu de hasard, le jeu sera dit équitable lorsque $E(X) = 0$. Il sera en faveur du joueur lorsque $E(X) > 0$ et en faveur de l'organisateur lorsque $E(X) < 0$.

Définition de la variance d'une variable aléatoire

On considère une variable aléatoire X qui prend pour valeurs les réels $x_1, x_2, \cdots, x_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et de loi de probabilité P.

(i) On appelle *variance de la variable aléatoire* X le réel noté $V(X)$ tel que :

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) \cdot (x_k - E(X))^2 = E\left((X - E(X))^2\right).$$

(ii) On appelle *écart-type de la variable aléatoire* X le réel noté $\sigma(X)$ tel que :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Proposition 5.8

On considère une variable aléatoire X.
Alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Remarque 5.9

L'écart-type d'une variable aléatoire X s'exprime dans la même unité que les valeurs prises par X.
Si X représente le gain d'un jeu de hasard, plus $\sigma(X)$ est grand, plus le risque de « gagner gros » ou de perdre est important.

3) Transformation affine d'une variable

Proposition 5.10

Soit X une variable aléatoire. Pour tous réels a, b, on a :

$$E(aX+b) = aE(X)+b \qquad V(aX+b) = a^2V(X) \qquad \sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X).$$

IV. Indépendance

1) Événements indépendants

Définition d'événements indépendants

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et P une loi de probabilité sur Ω.
Deux événements A et B sont indépendants si, et seulement si, on a :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Propriété 5.11

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A et B sont indépendants ;

(ii) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$;

(iii) $P_B(A) = P(A)$;

(iv) $P_A(B) = P(B)$.

Remarque 5.12

(i) On retrouve la notion intuitive d'événements indépendants : deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre.

(ii) ATTENTION : il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

Si deux événements A et B de probabilités non nulles sont incompatibles, on a :

$$P(A \cap B) = 0 \quad \text{mais} \quad P(A)P(B) \neq 0.$$

Proposition 5.13

Soient A et B deux événements.
A et B sont indépendants $\Leftrightarrow$ A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Corollaire 5.14

On obtient également les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants } &\Leftrightarrow \overline{A} \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\ &\Leftrightarrow \overline{A} \text{ et } \overline{B} \text{ sont indépendants.} \end{aligned}$$

2) Répétition d'expériences indépendantes

Définition d'expériences indépendantes

On considère des expériences aléatoires. On dira qu'elles sont indépendantes si les résultats de l'une ne dépendent pas des résultats de l'autre.

Proposition 5.15

Dans le cas d'une répétition d'expériences aléatoires indépendantes, une issue est une liste de résultats des différentes expériences et la probabilité de cette issue est le produit des probabilités de chacun des résultats de cette liste.

3) Variables aléatoires indépendantes

Définition de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires.
X et Y sont dites indépendantes si, et seulement si, pour tous réels x et y, on a :

$$P\left((X = x) \text{ et } (Y = y)\right) = P(X = x)P(Y = y).$$

Chapitre 6

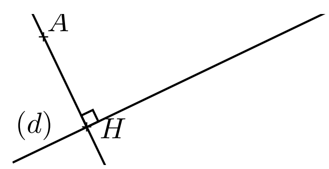
Le produit scalaire dans le plan

I. Définition du produit scalaire

1) Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit A un point et (d) une droite du plan.
On appelle *projeté orthogonal de A sur (d)* l'unique point H de (d), intersection de la droite perpendiculaire à (d) et passant par A.



2) Les différentes formulations du produit scalaire dans le plan

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs différents du vecteur nul.
On appelle *produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$* et l'on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le réel défini par l'une des quatre formes suivantes.

– **Avec les normes**

On a :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right).}$$

– **Avec les coordonnées**

Dans un repère orthonormé de l'espace, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors on a :

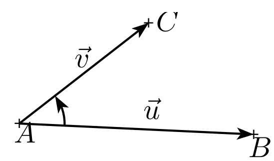
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = x.x' + y.y'.}$$

– **Avec le cosinus**

On a :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v}).}$$

Si l'on considère un point A, le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, alors on a également :



$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\cdot AC\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right).}$$

Remarque 6.1

Comme, pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos x$ alors, on a : $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \cos(\widehat{BAC})$ puis, on peut écrire que :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\cdot AC\cdot\cos(\widehat{BAC}).}$$

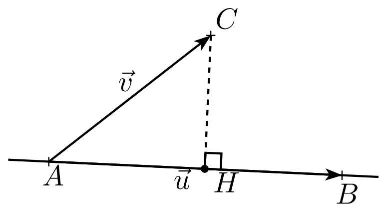
– **Avec le projeté orthogonal**

On reprend les notations précédente : un point A, le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. On appelle H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Alors on a :

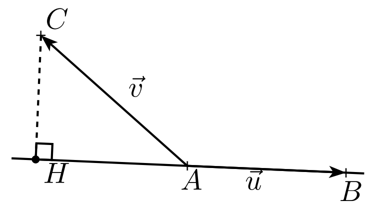
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}.}$$

En utilisant la formule avec le cosinus, on obtient immédiatement :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{cases} AB.AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont même sens} \\ -AB.AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}.}$$



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire

Remarque 6.2

On a défini le produit scalaire de deux vecteurs différents du vecteur nul mais on peut prolonger cette définition au vecteur nul par :

$$\text{pour tout vecteur } \vec{u}, \text{ on a : } \vec{u}\cdot\vec{0}=0.$$

On peut alors noter que les formules avec les normes et les coordonnées restent valables.

3) Propriétés du produit scalaire

Propriété 6.3

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ du plan et tout réel λ, on a :

(i) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$: le produit scalaire est *symétrique* ;

(ii) $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)=\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})$;

(iii) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=(\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u}$;

les propriétés (ii) et (iii) signifie que le produit scalaire est *bilinéaire* ;

(iv) $\|\vec{u}\|^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^{\,2}$: on dit « *le carré scalaire de $\vec{u}$* » .

Corollaire 6.4

La proposition (iv) nous donne immédiatement que, pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow \vec{u}=0 \quad \text{et} \quad \vec{u}\cdot\vec{u}\in[0;+\infty[.$$

On dit que le produit scalaire est *défini positif*.

Corollaire 6.5

Les propriétés précédentes nous permettent d'écrire les résultats suivants :

(i) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$.

(ii) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$.

(iii) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

Théorème 6.6

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan différents du vecteur nul.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}.$$

Remarque 6.7

Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs du plan.

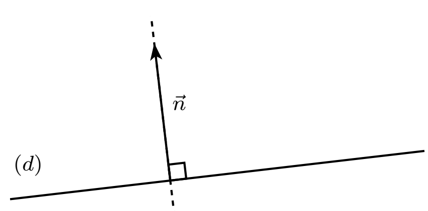
II. Applications du produit scalaire

1) Équation cartésienne de droite dans un repère orthonormé

a) Vecteur normal à une droite

Définition de vecteur normal à une droite

Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal à une droite (d) si, et seulement si, il dirige une droite perpendiculaire à (d).



b) Vecteur normal et équation cartésienne de droite

Donnons une caractérisation d'une droite connaissant un point et un vecteur normal.

Théorème 6.8

Soient A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est une droite du plan.

Réciproquement, pour tout point M de la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$, on a : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Proposition 6.9

Soient a, b deux réels non tous nuls (a et b ne peuvent pas être nuls simultanément).
Dans un repère orthonormé du plan, on considère une droite (d).
Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d) si, et seulement si, il existe un réel c tel que $ax + by + d = 0$ est une équation cartésienne de (d).

Proposition 6.10

Soient (d) et (d') des droites de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ respectivement.
On a :

$$(d) \perp (d') \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n'} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0.$$

2) Équation de cercle dans un repère orthonormé

Définition d'un cercle

Soient Ω un point du plan et R un réel positif ou nul.
On appelle *cercle de centre* Ω *et de rayon* R l'ensemble des points M du plan tel $M\Omega = R$

La définition nous donne immédiatement le résultat suivant.

Théorème 6.11

Dans un repère orthonormé, tout cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R a pour équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ où a, b sont des réels et $R \in [0; +\infty[$.

Réciproquement, toute équation de la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ où a, b sont des réels et $R \in [0; +\infty[$ est celle d'un cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R.

Une telle équation s'appelle une équation réduite de cercle

Proposition 6.12

Un triangle est rectangle si, et seulement si, il est inscrit dans un cercle dont l'un des côtés est un diamètre.

Proposition 6.13

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de de diamètre $[AB]$. Alors :

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

Exemple 6.14

Deux types d'exercices à savoir faire.

○ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est-elle une équation de cercle ? (a, b, c réels)

Les équations $x^2+y^2-2x+4y = 0$ et $x^2+y^2+6x-4y+17 = 0$ sont-elles des équations de cercle ?

On met les expressions sous forme canonique.
On a :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 4y &= x^2 - 2x + y^2 - 4y \\ &= (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 \\ &= (x-1)^2 + (y-2)^2 - 5. \end{aligned}$$

Donc :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

C'est donc le cercle de centre le point de coordonnées $(1; 2)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

On a :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 6x - 4y + 17 &= x^2 + 6x + y^2 - 4y + 17 \\ &= (x+3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 + 17 \\ &= (x-1)^2 + (y-2)^2 + 4. \end{aligned}$$

Donc :

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 17 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 = -4.$$

Comme une somme de carré ne peut pas être négative, ce n'est pas une équation de cercle.

○ Déterminer l'équation d'un cercle connaissant un diamètre

Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1;-2)$ et $B(3;4)$.

On calcule les coordonnées du milieu I de $[AB]$: $I(2\,;\,1)$.

On calcule la longueur du rayon : $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{(3-1)^2+(4-(-1))^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

Le cercle a donc pour équation $(x-2)^2+(y-1)^2 = \dfrac{29}{4}$.

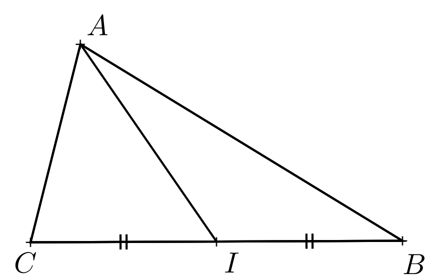
3) Le théorème de la médiane

On commence par donner (ou rappeler) *la forme vectorielle* de ce théorème.

Proposition 6.15

Soient A, B deux points du plan.

$$I \text{ est le milieu de } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$



On donne maintenant *la forme métrique* du théorème de la médiane.

Théorème 6.16

Soient A, B deux points et I le milieu de $[AB]$. Alors, pour tout point M, on a :

$$MA^2+MB^2 = 2MI^2+\frac{AB^2}{2}.$$

4) La formule d'Alkashi

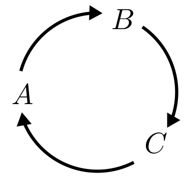
Théorème 6.17

Soit ABC un triangle. On a :

$$BC^2 = AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\left(\widehat{BAC}\right).$$

Remarque 6.18

(i) En faisant une permutation circulaire des points A, B, C :



on obtient deux expressions similaires de la formule d'Alkashi :

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2BC \cdot AB \cdot \cos\left(\widehat{ABC}\right)$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos\left(\widehat{ACB}\right)$$

(ii) Si le triangle est rectangle en A, on a : $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = 0$ puis $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

On retrouve le théorème de Pythagore.